Conceptions des étudiants des classes préparatoires en Tunisie sur l'intégrale de Riemann

Inen Akrouti & Slim Mrabet

Abstract. The integral is one of the most important topics in Calculus that is difficult to be understood by many students. When solving definite integral application problems, previous research emphasizes that students found the antiderivative procedure more useful and easier than the approximation process or area (Akrouti, 2020). This paper focuses on students' conceptions of the definite integral in the first year of preparatory class. Data were collected from students' written responses to questions that relate to their views of integration. The analysis shows that the majority of students choose the algebraic process to evaluate the proposed integrals. Participants were first-semester calculus students enrolled in a public university.

Keywords. Integral, Conception, Concept image, Approximation process, Area.

Résumé. Le choix du thème intégral que nous traitons dans ce travail s'inscrit dans un cadre plus large, celui de la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur. En première année des classes préparatoires tunisiennes, les étudiants ont des conceptions plus ou moins particulières sur les intégrales. Influencés par les choix institutionnels qui s'accordent autour de l'idée que la procédure algébrique est la clé des situations d'intégration, ces étudiants ne semblent pas en mesure de s'en sortir lorsqu'un calcul de primitive ne va pas de soi. Pour creuser cette idée, nous nous sommes orientés vers ces étudiants en leur proposant des situations où d'autres conceptions doivent être appelées. Un retour sur des travaux antérieurs sur ce thème et sur des recherches en didactique nous a permis de fixer des outils théoriques nécessaires à notre analyse. Le résultat montre qu'en l'absence de certaines procédures dans l'enseignement de l'intégrale, comme celle d'approximation, ce concept est privé d'éléments fondamentaux de son fondement, et propose de mettre ces résultats au service de la formation des enseignants.

Mots-clés. Intégrale, Conception, Concept image, Processus d'approximation, Aire.

Table des matières

1. Introduction

L’intégrale est un concept fondamental du domaine de l’analyse réelle. Il se situe au cœur de la transition entre l’enseignement secondaire et l’enseignement supérieur et au carrefour de plusieurs objets mathématiques. Par ailleurs, il est devenu un sujet d'intérêt de la communauté de l'enseignement des mathématiques à l’université au cours des deux dernières décennies. En fait, l’intégrale sert de base à de nombreuses applications dans des domaines scientifiques divers et à introduire d’autres concepts mathématiques (Thompson, & Silverman, 2008 ; Sealy, 2006), et se caractérise par une structure qui lui donne une nature multiforme (Akrouti, 2020, 2021a). Dans l’histoire des mathématiques et de son enseignement, il pourrait bien avoir des interprétations différentes, faisant appel par exemple à la notion de primitive ou à celle d’aire (Akrouti, 2021a).

Ce travail a pour objectif de mettre à la disposition des enseignants, formateurs et inspecteurs pédagogiques un ensemble d’idées, d’analyses et d’outils théoriques qui leur permettent de mieux comprendre le sens d’une intégrale de Riemann, son fondement, sa raison d’être et ses différentes approches. Ceci pourrait servir à s’apercevoir que les intégrales sont plus riches qu’on le pensait, que leurs domaines d’application sont plus variés, et ainsi à remettre en question la façon de les introduire aux élèves en fin de secondaire et à l’entrée à l’université. L’analyse des différentes conceptions possibles de l’intégrale a un double rôle : expliquer certains types d’erreurs fréquemment observées chez les apprenants et mettre en évidence le fossé qui existe au niveau de notre concept, entre l’enseignement secondaire et l’enseignement supérieur. Un aperçu historique sur ce sujet nous semble utile pour montrer les conditions d’apparition et d’utilisation des intégrales en mathématiques et dans des disciplines voisines, et les différentes questions et obstacles qui ont accompagné son évolution. Ainsi, dans ce qui suit, nous faisons un retour sur quelques travaux historiques et didactiques liés à notre sujet pour préciser de près notre problématique et les principales questions que nous posons. Nous précisons après les outils théoriques nécessaires à notre travail ainsi que la méthodologie que nous suivons. L’expérimentation que nous avons faite auprès d’étudiants tunisiens permettra de répondre à notre interrogation quant aux différentes conceptions de l’intégrale définie disponibles chez les étudiants et les conséquences didactiques qui en découlent.

2. Un regard didactique sur l'histoire de l'intégrale

Dans l'histoire, ce concept se rattache au développement du calcul infinitésimal qui a ouvert de nouvelles pistes de réflexion dans beaucoup de domaines de la science, en particulier en mathématiques. Il a guidé des changements fondamentaux en abordant des questions qui n'avaient pas été posées avant. Pour le définir, Carnot (1839) considère l'intégrale comme une somme, alors que pour De Freycinet (1860), c'est un calcul de limite. Ce dernier explique en considérant que : « *les termes des sommes dont le calcul intégral recherche les limites sont toujours supposés de la forme :* $f(x)\Delta x$ » (p. 102). Cette caractérisation en structure de relation multiplicative entre la fonction à intégrer $f(x)$ et une petite quantité Δx, a été considérée par des chercheurs en didactique des mathématiques (Jones, 2015 ; Sealy, 2014) et en didactique de la physique (Meredith et Marrongelle, 2008) comme indispensable aux étudiants pour comprendre conceptuellement la notion d'intégrale, puisqu'elle évoque un raisonnement quantitatif nécessaire au développement des connaissances cohérentes et productives.

L'application des règles du calcul intégral est basée sur le principe des quantités infinitésimales, comme par exemple dans le cas de la recherche d'une aire sous une courbe : si on augmente l'abscisse x d'une quantité infiniment petite dx, l'aire cherchée augmentera de celle d'un rectangle infiniment petit qui sera la différentielle de l'aire en question. Le calcul intégral a été aussi développé comme une étude de la variation d'un mouvement dans un cadre cinématique, mais qui met en œuvre une approche numérique comprenant des quantités infinitésimales. Ainsi, il nous semble judicieux d'examiner tout d'abord, comment un enseignement de l'intégrale, dans lequel aucune attention particulière n'est accordée à sa structure multiplicative, pourrait être un facteur qui amène les étudiants à construire des conceptions qui ne sous-tendent pas sa structure sous-jacente. En particulier, il paraît que certains instructeurs des programmes scolaires n'accordent pas suffisamment d'importance au rôle que pourrait jouer cette structure pour donner du sens à une intégrale.

Dans un travail antérieur (Akrouti, 2021b), il nous a été possible de souligner qu'en fin du secondaire, la majorité des étudiants n'ont pas une compréhension approfondie de l'intégrale et qu'ils ne peuvent pas traiter convenablement des situations légèrement modifiées par rapport aux situations classiques rencontrées en classe, vu que souvent, ils abandonnent la construction de l'intégrale au profit du calcul algébrique. Suite à ce constat, nous avons pensé à proposer aux étudiants, après le cours d'intégration, un test comportant des situations où la procédure de primitive ne fonctionne pas. Notre ambition est d'une part, de montrer qu'en dehors des aspects calculatoires, les intégrales peuvent jouer un rôle dans la résolution de nombreux problèmes, et d'autre part d'apprendre aux étudiants de nouvelles démarches qui se basent dans notre cas, sur le découpage/encadrement pour mettre en œuvre un processus d'approximation. Dans ce test, nous cherchons en particulier des éléments de réponse à la question des différentes manières possibles que les étudiants peuvent mobiliser dans des situations non standard, et les conceptions qui pourraient être évoquées.

3. Revue de littérature

L'intégrale est un objet particulièrement complexe qui comporte plusieurs facettes amenant à une pluralité de conceptions (Akrouti, 2021a). Il est investi dans plusieurs domaines inter et intra mathématiques, et pourrait être interprété en termes d'aire, de primitive, de somme ou de limite d'approximation (Orton, 1983 ; Rasslan & Tall, 2000 ; Jones, 2015 ; Akrouti, 2021b). Cette pluralité nécessite une attention particulière pour faire comprendre aux étudiants les idées principales qui le fondent, puisqu'une utilisation excessive de certaines interprétations de l'intégrale pourrait limiter son application et son domaine d'efficacité (Sealey, 2006 ; Akrouti, 2020, 2021). Hall (2010) a mis l'accent sur l'influence du langage informel sur la conception des étudiants de l'intégrale alors que d'autres chercheurs (Engelke & Sealy, 2012 ; Sealey & Oehrtman, 2005, 2007 ; Sealey, 2006) se sont focalisés sur la conceptualisation des étudiants de l'intégrale comme limite d'une somme de Riemann. (Rasslan & Tall, 2000 ; Jones, 2013, 2015 ; Akrouti, 2021a) ont traité la question des conceptions des étudiants sur l'intégrale définie et les ont classés selon une typologie qui montre que pour les étudiants, ces conceptions ne sont pas également représentatives du concept, et ne montrent pas de la même manière son fondement. En effet, Rasslan & Tall, (2000) constatent que la plupart des étudiants n'arrivent pas à donner une définition significative de l'intégrale définie et ont des difficultés à mettre en œuvre le calcul d'aires dans des contextes variés. Jones (2015) identifie quatre types de conceptions qui apparaissent chez les étudiants : aire, primitive, somme et limite de sommes. Il souligne que la majorité des étudiants interprètent l'intégrale en termes d'aire, et très peu l'interprète en termes de limites d'approximation. En revenant à la typologie de Jones (2015), Akrouti (2021b) considère qu'on peut regrouper les conceptions de somme et de limite de somme en une même conception qui définit un processus d'approximation, et qui est enracinée dans les sommes de Riemann. Cette conception est particulièrement utile dans de nombreux contextes mathématiques et physiques, et est considérée comme l'interprétation la plus précieuse qui pourrait donner un sens à l'intégration (Sealy, 2014 ; Simmons & Oehrtman, 2019 ; Akrouti, 2021a), puisqu'elle permet à l'étudiant de construire effectivement un processus permettant de retrouver la valeur de l'intégrale définie en mettant en œuvre sa structure sous-jacente. Ces travaux montrent qu'en dépit de son utilité, cette conception pose problème aux étudiants qui n'arrivent pas à l'investir dans leurs démarches, et qui préfèrent se plonger dans des procédures de calcul de primitives. Ainsi, dans le cadre de ce papier, nous considérons les trois types de conceptions suivants :

- La conception de primitive où les étudiants appellent le Théorème Fondamental de l'Analyse. Cela signifie qu'ils cherchent une primitive, l'appliquent aux deux bornes de l'intégrale et calculent leur différence : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où f est la fonction à intégrer sur $[a,b]$ et F est une primitive de f.
- La conception d'aire qui consiste à considérer l'intégrale comme l'aire sous la courbe comme le montre le schéma ci-dessous.

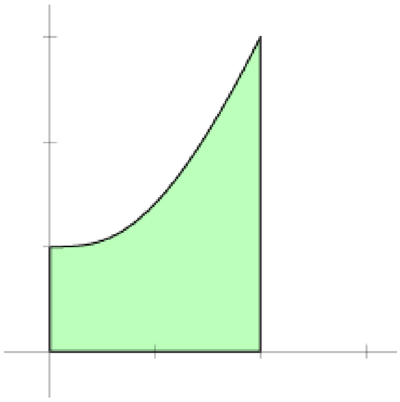


Figure 1 − La conception d'aire

- La conception de processus d'approximation qui « se prête à être imaginée comme la somme des produits de longueurs et de largeurs de rectangles où l'un des facteurs est un infinitésimal ou une très petite quantité » (Akrouti, 2020, p. 53), comme le montre la figure 2 :

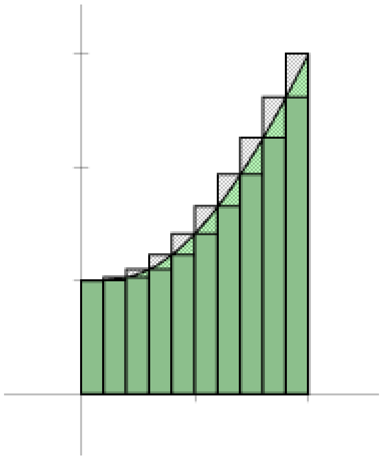


Figure 2 − La conception de processus d'approximation

4. Cadre théorique

Pour répondre à notre problématique, nous nous orientons vers des étudiants de première année universitaire. Nous cherchons à cerner les caractéristiques spécifiques de leurs conceptions en aval du cours sur l'intégration, et pour ce faire, le concept image (Tall et Vinner, 1981), les conceptions opérationnelles et structurelles d'un objet mathématique telles que définies par (Sfard, 1991) et les représentations sémiotiques de (Duval, 1993, 1995, 2006) semblent fournir un cadre théorique pertinent.

Tall et Vinner (1981) définissent le concept image chez un individu comme l'ensemble des structures cognitives associées au concept. Il comprend les processus et les propriétés associés à ce concept et les images mentales qu'il pourrait inclure : "The total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes" (Tall & Vinner, 1981, p. 152). Tall et Vinner soulignent que le concept image se construit au fil des années « as the individual meets new stimuli and matures » (Idem). Vinner (1983) précise que le mot « image » inclut toutes les représentations visuelles du concept, y compris les symboles). Ainsi, une image « bien définie » d'un concept mathématique peut être considérée comme la forme ou la structure finale dans laquelle le concept a pris place dans le raisonnement d'un individu. Vinner et Dreyfus (1989) ajoutent à la description précédente que l'image mentale signifie tout type de représentation : image, forme symbolique, diagramme, graphique, etc... Le concept image peut inclure des idées significatives, comme il peut également inclure des idées contraires aux significations et aux définitions formelles du concept. Dans certains cas, il peut différer à divers égards du concept formel défini et accepté par la communauté mathématique en général. Tall et Vinner utilisent l'expression « The evoked concept image » pour indiquer les éléments du concept image qui ont été découverts dans les réponses des étudiants. En bref, notre intérêt est de comprendre les images mentales, les processus et les liens que les étudiants évoqueraient lorsqu'ils abordent le thème d'intégration. Il est important de garder à l'esprit que les étudiants participants à notre étude peuvent posséder des éléments de leurs concepts images qui n'ont jamais été découverts dans leurs réponses. En plus, souvent, une seule petite partie du concept image est activée par un stimulus particulier.

Il est nécessaire ainsi de préciser que pour analyser les réponses des étudiants, nous nous focalisons sur les composantes possibles du concept image. Pour fixer ceux qui nous sont utiles, nous nous référons à d'autres théories en didactiques des mathématiques, notamment celles relatives aux travaux de Sfard (1991) et Duval (1996). Remarquons aussi que les composantes relatives au « processus cognitif » et aux «représentations sémiotiques » peuvent contribuer à la construction théorique du concept image relatif à notre sujet.

Sur ce point, Sfard précise qu'un concept mathématique possède une dualité dans son existence, et que le raisonnement mathématique possède une particularité qui s'investigue à travers les statuts épistémologique et cognitif. Par ailleurs, un individu est censé avoir une conception structurelle lorsqu'il conçoit le concept mathématique comme s'il s'agissait d'un objet abstrait de manière statique, tandis que l'individu aurait une conception opérationnelle du même concept lorsqu'il concentre sa réflexion sur les processus, les algorithmes et les actions contenus dans le concept en jeu. D'un point de vue cognitif, Sfard distingue trois étapes qui correspondent à trois niveaux de structuration dans le processus de conceptualisation d'un objet mathématique : l'intériorisation, la condensation et la réification. Un processus est intériorisé lorsqu'il peut s'exprimer par des représentations mentales. Dans le cas de l'intégrale, il s'agit de la représentation graphique de la fonction à intégrer et de l'utilisation de l'aire sous la courbe. La condensation correspond à la phase de transformation du calcul en de nouvelles procédures aisément accessibles. Dans le cas de l'intégrale, cette étape correspond au découpage du domaine d'intégration en sous-domaines plus fins et approcher l'aire principale par la somme des aires des rectangles de longueur $f(x_i)$ et de largeur Δx. A ce niveau, le sujet apprenant peut agir sur le nombre de découpages jusqu'à le rendre de l'ordre d'un infinitésimal. La réification correspond à la capacité du sujet apprenant à concevoir l'objet mathématique comme une entité qui se réfère à elle-même. En effet, il s'agit de l'unification des procédures précédentes. L'objet est ainsi le résultat du processus qu'il a produit et fait partie d'une théorie. Par la suite, on peut étudier ces propriétés et déterminer les relations entre ses différents représentants. Dans le cas de l'intégrale, le passage à la limite unifie toutes les procédures de découpage et de sommation, et permet de calculer la valeur exacte de l'intégrale définie. Ainsi, le sujet apprenant a bien défini son concept image.

Un objet mathématique, n'existe pas indépendamment de la totalité de ses représentations possibles. Chaque représentation offre une porte d'accès, mais elle ne doit pas être confondue avec l'objet considéré. En fait, nous pouvons visualiser des informations et des connaissances au moyen des représentations graphiques, des figures, des gestes du corps ou de la manipulation des objets concrets. La visualisation permet de rendre l'accès au niveau formel plus flexible, et nous rejoignons Tall (1996) qui « insiste sur l'efficacité des expériences physiques et de la visualisation (géométrique, graphique, sur un dessin, par un logiciel ou une calculatrice) pour amener les apprenants à développer un sens intuitif des procepts de l'analyse réelle, et les préparer à transiter vers une forme de conceptualisation avancée – en l'occurrence formelle » (cité par Ghedamsi, 2008, p. 87). Duval (1996) considère également que l'objet mathématique n'est pas accessible par la perception, et identifie deux dimensions issues des représentations sémiotiques : une dimension discursive relative aux registres de la langue (naturelle, formelle) et une dimension non discursive relative aux registres visuels (les graphiques, les schémas, les figures).

D'un autre côté, Klinger (2019) souligne que les conceptions et les images mentales comptent parmi les parties les plus importantes qui constituent le concept image de l'individu. Cela justifie en quelque sorte l'intérêt que nous portons dans ce travail aux conceptions des étudiants, que nous résumons dans le tableau suivant :

Concept image	Conceptions	Primitive
		Aire
		Limite d'approximation
	Processus cognitif	Intériorisation : représentation mentale
		Condensation : transformation en procédures aisément accessibles
		Réification : unification des procédures
	Représentation sémiotique	Représentation algébrique
		Représentation visuelle (graphiques, schéma, geste du corps)
		Représentation numérique
		Représentation verbale

Tableau 1 – La composition du concept image

5. Contexte et objectif

Pour fixer les idées, rappelons que pour les premières années des classes préparatoires tunisiennes, l'enseignement de l'intégrale a pour objectif de mettre en œuvre le lien entre intégrale et somme de Riemann par la relation suivante : $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$. En tant qu'énoncé mathématique, cette écriture est une représentation symbolique de la relation entre intégrale et sommes de Riemann (les sommes de Darboux sont exclues du programme officiel), qui se base sur la décomposition de l'aire relative à cette intégrale en une combinaison d'aires rectangulaires. Ceci met en œuvre un processus à la fois algébrique et géométrique significatif pour trouver l'intégrale en question. L'aire de chaque rectangle étant calculée en multipliant sa longueur par sa largeur, soit par $f(x_i)\Delta x$. Le symbole de la somme indique que toutes les aires des rectangles doivent être additionnées et combinées pour trouver l'aire totale. Le processus consiste à subdiviser l'intervalle d'intégration autant de fois que l'on souhaite, et plus la subdivision est fine, plus l'approximation est meilleure. Dans notre cas, le contexte qui nous intéresse relève de la procédure intégrale : **découpage → somme → encadrement → passage à la limite**. Cette procédure met en œuvre les trois étapes suivantes :

- Le découpage/additivité : si on découpe un domaine D admettant une aire en deux sous domaines disjoints X et Y, alors X∪Y admet une aire et on a : aire (X∪Y) = aire (X) + aire (Y) ;
- L'encadrement : : pour toute fonction f continue par morceaux, positive, croissante et bornée sur $[a,b]$, on définit les deux sommes suivantes : $S_n^- = \sum_0^{n-1} \frac{b-a}{n} \min_{t\in[x_i,x_{i+1}]} (\mathrm{f(t)})$ et $S_n^+ = \sum_{n=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \max_{t\in[x_i,x_{i+1}]} (f(t))$. On a alors $S_n^- \leq \int_a^b f(t)dt \leq S_n^+$;
- Le passage à la limite : lorsque le découpage du domaine D devient de plus en plus petit, l'écart entre les encadrements supérieurs et inférieurs devient de plus en plus petit. Ce processus converge vers un réel unique qui est la valeur de l'intégrale en question.

Dans le cadre de ce travail, nous montrons que les différentes approches d'une intégrale définie ne sont pas toutes présentes et mobilisées chez les étudiants, et que chacune de ces approches définit un environnement mathématique et un ensemble de processus différent. Ceci pourrait enrichir le répertoire de connaissances de chaque étudiant et fournir aux enseignants un support pour l'élaboration d'un cours. En effet, le processus adopté pour traiter une tâche considérant l'intégrale comme limite d'une somme de Riemann est intrinsèquement différent de celui qui cherche une intégrale par le calcul d'une primitive. Nous pensons que cette différence pourrait causer divers niveaux de confusion et de perplexité pour les étudiants, et avons ainsi l'ambition d'amener ces derniers à découvrir le fait qu'utiliser une procédure d'intégration via la recherche de primitive pour calculer une intégrale ne devrait pas être systématique ou naturel, si nous cherchons à donner du sens aux activités mathématiques, et à chercher, pour ce qui nous intéresse, les fondements d'une intégrale.

6. Méthodologie

Notre expérimentation consiste à présenter à un nombre d'étudiants tunisiens volontaires d'une classe préparatoire, un test composé de deux exercices sur les intégrales. Dans ce test, nous avons choisi de proposer deux tâches non routinières aux étudiants après le cours d'intégration, et qui appellent les intégrales de Riemann. Nous procédons ensuite par une analyse a priori pour préciser les comportements attendus des étudiants à partir de la typologie des conceptions que nous avons dégagée plus haut, puis nous dépouillons et analysons leurs productions. Pour consolider notre analyse, nous avons proposé aux mêmes étudiants trois questions préliminaires, qui ne vont pas faire l'objet d'une analysée détaillée, et qui ne servent qu'à éclairer certaines réponses des étudiants. Nous n'y reviendrons ainsi qu'en cas de besoin. Remarquons que l'échantillon d'étudiants que nous avons choisi n'est pas représentatif de l'ensemble des étudiants tunisiens, et ainsi, nous ne prétendons pas généraliser les résultats que nous trouvons sur l'ensemble du système tunisien. Notre but est plutôt d'évoquer une problématique liée à l'introduction des intégrales dans l'enseignement supérieur, qui semble passer sous silence, et qui pourrait remettre en question l'organisation des enseignements dans la transition lycée-université.

Dans les deux exercices que nous analysons, nous avons fait le choix d'écarter les tâches dont la résolution se base sur le Théorème Fondamental de l'Analyse (TFA), fréquemment rencontrées en classe, et se focaliser pour l'essentiel sur l'aspect opérationnel de la notion d'intégrale. Ainsi, les étudiants sont mis face à l'impossibilité d'utiliser le processus de primitive.

Notons qu'en classe préparatoire, l'enseignement de l'intégrale exclu toute interprétation géométrique ou explication algébrique métaphorique, sauf peut-être dans les cas les plus simples. Remarquons aussi que la majorité des étudiants ne peuvent pas interpréter correctement le sens du symbole de la somme, ni la façon dont se fait le passage d'une quantité continue à une autre discontinue, ni le sens du différentiel dx qui passe inaperçu dans le processus de résolution. Avant la passation du test, nous avons jugé utile de poser quelques questions aux étudiants choisis :

Q1 : D'après vous, quelle est la meilleure méthode pour calculer une intégrale ?

Q2 : Pourquoi peut-on interpréter une intégrale définie comme une aire ?

Q3 : Comment peut-on interpréter la différence entre les sommes de Riemann et une intégrale définie ?

Le test a été soumis à treize étudiants de première année préparatoire de l'Institut Préparatoire aux Ecoles d'Ingénieurs de Tunis (IPEIT), parcours Math-physique (MP), au mois de mai 2019. Notre objectif est d'aller au-delà des réponses justes ou fausses et des erreurs identifiées, pour regarder les images mentales que pourraient activer les étudiants dans leurs productions. Le test est composé de deux exercices qui appellent le calcul intégral, une fois à partir d'une représentation graphique et une fois à partir de l'expression explicite d'une fonction à intégrer.

Dans l'énoncé des deux exercices, nous avons préféré le mot « calculer » par rapport à d'autres expressions possibles, malgré les nuances qu'il peut engendrer et ce, pour ne pas influencer l'étudiant dans le choix de la méthode qu'il juge utile, quoique dans les deux exercices, il s'agit réellement de la recherche d'une valeur approchée plutôt que du calcul. Plus particulièrement, nous cherchons à explorer le comportement des étudiants quand ils s'aperçoivent que la situation graphique est inhabituelle, soit par la discontinuité de la fonction en un point, soit par la donnée d'une fonction dont la primitive est difficile à trouver. Nous tiendrons compte dans notre analyse du fait que certaines réponses seraient influencées par l'effet d'un contrat didactique implicite, relatif à la demande de « calculer », et qui pourrait inciter les étudiants à préférer une approche calculatoire, plutôt que de procéder par approximation.

6.A. Exercice 1

Le graphique dans Figure 3 est la courbe représentative d'une fonction g. Calculer $\int_0^4 g(x)dx$.

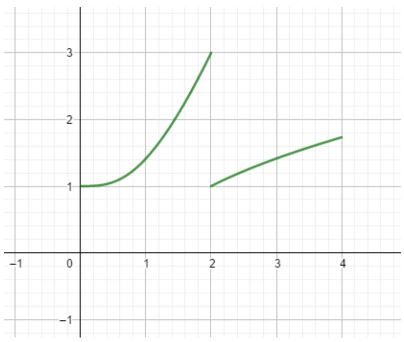


Figure 3 − La courbe représentative de l'exercice 1

Cet exercice a pour objectif de mettre en œuvre la procédure intégrale pour une fonction définie à partir d'un graphique. Cette procédure se base sur le calcul de l'aire d'une surface non polygonale en mettant en œuvre la conception du processus d'approximation. Deux procédures possibles : chercher les valeurs utiles au calcul à partir du quadrillage donné, ou trouver des approximations par la méthode des rectangles. Pour cette raison, le travail des étudiants est analysé en détail suivant des indications qualitatives de mesures d'accompagnement qui peuvent alors être formulées.

6.B. Exercice 2

Soit f une fonction définie sur [0,2] par $f(x) = \sqrt{1+x^3}$. Calculer $\int_0^2 f(x)dx$.

Dans cet exercice la fonction à intégrer ne fait pas partie des fonctions usuelles, fréquemment rencontrées en classe. Puisque le calcul d'une primitive ne va pas de soi, nous souhaitons pousser les étudiants à « inventer » d'autres procédures possibles. Notre objectif est de les amener à mettre en œuvre la procédure intégrale se basant sur l'interprétation graphique de la forme algébrique d'une fonction continue, croissante et positive, et ce, en cherchant à établir des encadrements de plus en plus proches de la valeur de l'intégrale cherchée.

7. Conceptions a priori

Dans ce paragraphe, nous analysons a priori les différents choix que les étudiants peuvent faire devant ces exercices. Nous nous référons aux catégories de conceptions que nous avons citées et aux acquis de l'enseignement secondaire pour préciser ce que nous prévoyons comme réussite et échec, selon chaque procédure suivie. Bien que les situations proposées ne soient pas habituelles, ce qui laisse à prévoir un taux d'échec élevé, on ne perd pas de vue que les étudiants des classes préparatoires sont supposés avoir un « bon » niveau en mathématiques.

7.A. Exercice 1

La question est non standard et la méthode de calcul de primitive, souvent préférée par les étudiants, est inefficace. L'intégrale en jeu est donnée à partir de la courbe représentative de la fonction à intégrer. Les étudiants se trouvent face à l'aire d'une surface non polygonale. Pour réussir cette tâche, deux procédures sont possibles :

Dans la première, il s'agit d'encadrer la surface S en question par deux surfaces polygonales, l'une contenue dans S et l'autre contenant S. Cette procédure met en œuvre la conception d'aire, se limite au statut objet de la notion d'aire, et ainsi met les connaissances mobilisées dans un niveau pseudo-structurel (Akrouti, 2019).

Dans la deuxième, il s'agit de décomposer l'intervalle d'intégration en subdivisions aussi petites que l'on souhaite. La valeur de l'intégrale est encadrée par deux sommes (l'une inférieure, l'autre supérieure) ayant la même limite. La complémentarité processus-objet est ainsi acquise : l'intégrale en jeu (objet) et l'approximation par l'aire des surfaces polygonales subdivisées mettent en œuvre un processus de somme d'aires (processus). Cette procédure se base sur l'interprétation de l'intégrale en tant qu'aire et donc sur la conversion entre les registres graphique et numérique.

7.B. Exercice 2

La question est problématique. Bien que la fonction soit continue, son expression ne rentre pas sous l’une des formes usuelles des primitives connues. Elle pourrait par conséquent mettre les étudiants face à un conflit cognitif : d’une part, ils connaissent depuis la fin du secondaire que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive, et d’autre part, ils ne sont pas en mesure de déterminer cette primitive. Les étudiants qui ont gardé une bonne connaissance pourraient pressentir que la recherche d’une primitive n’est pas possible, et s’engageraient dans la recherche d’un autre moyen en se basant sur l’interprétation de l’intégrale en tant qu’une aire algébrique. Pour ces étudiants, deux procédures sont possibles : la première se base sur le processus d’approximation accompagné de conversions de registres (une conversion algébrique/graphique, puis une conversion graphique/numérique), alors que la deuxième se base sur l’approximation par l’aire d’une surface polygonale. Cette dernière met en œuvre le statut objet, et les étudiants sont à un niveau pseudo-structurel. Remarquons que la procédure d’approximation peut être accompagnée de conversions de registres (algébrique/graphique puis graphique/numérique), mais ces conversions ne sont pas nécessaires. Pour les étudiants qui optent pour une conception de primitive, induite en partie par l’institution (Akrouti, 2019), nous nous attendons à ce qu’ils pensent aux changements de variables ou à l’intégration par parties.

8. Analyse et discussion

Dans ce qui suit, nous présentons les résultats de chaque exercice, puis, nous les analysons en nous servant des outils théoriques développés plus haut. Des exemples bien choisis des réponses recueillies des étudiants vont consolider nos idées.

8.A. Résultats

8.A.a. Exercice 1

Nous résumons les résultats des réponses des étudiants dans le tableau suivant :

Conception	Aire	Primitive	Processus d’approximation	Pas de réponses
Nombre	2	0	6	5

Tableau 2 – Les réponses à l’exercice 1

Deux étudiants ont répondu à la première question en utilisant la notion d’aire d’une surface polygonale, six ont donné des réponses en se basant sur la procédure de processus d’approximation et cinq n’ont pas répondu à la question. Ainsi, dans ces réponses, deux procédures ont été utilisées.

Voici des exemples des réponses recueillies :

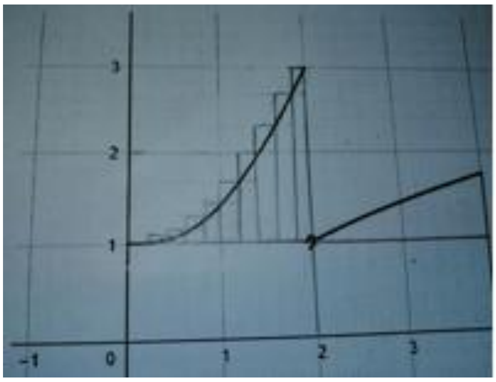


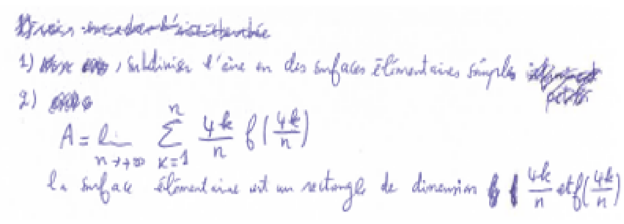
Figure 4 – Procédure de limite d'approximation

Cette réponse fait partie de la conception de processus d'approximation et fait appel à la méthode des rectangles. Cependant, cet étudiant n'a pas pu mettre cette conception en application et a simplement décrit la méthode sans calculer effectivement la valeur de l'intégrale. La conception existe, mais elle n'est pas bien développée, et le concept image n'est pas bien structuré. Il semble que l'étudiant n'ait pas pu convertir les données de la forme graphique à la forme numérique en se basant sur un repère défini à partir du quadrillage : il s'agit d'un problème de changement de registres auquel il est clair qu'il n'est pas habitué.

La décomposition du concept image de cette réponse nous donne le tableau suivant :

Concept image	Conception	Processus d'approximation
	Processus cognitif	Intériorisation : le recours à l'idée de l'aire sous la courbe
		Condensation : le recours à des approximations en utilisant la méthode des rectangles
		Réification : n'est pas accomplie
	Représentation sémiotique	Représentation visuelle : représentation graphique.
		Représentation numérique

Tableau 3 – La décomposition du concept image relatif à la conception de processus d'approximation



1) Subdiviser l'aire des surfaces élémentaires simples.

2) $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{n} f(\frac{4k}{n})$

La surface élémentaire est un rectangle de dimension $\frac{4k}{n}$ et $f(\frac{4k}{n})$.

Figure 5 – Construction d'analogie avec la structure algébrique

Cet étudiant a tenté de trouver une analogie entre la représentation graphique donnée et une structure algébrique afin de trouver la structure sous-jacente dans une somme de Riemann, et a représenté algébriquement les hauteurs, les longueurs et les sommes de rectangles.

Notons que, aucun de ces étudiants n'avait invoqué le raisonnement basé sur les sommes de Riemann pour interpréter l'intégrale dans la deuxième question, et que la plupart d'entre eux avaient montré qu'ils ne pouvaient pas le faire dans la première question. Ce qui manque pour ces étudiants, c'est la conscience que les procédures de calcul d'une intégrale pourraient être soumises à un raisonnement géométrique.

<table>
<tr><td rowspan="7">Concept image</td><td>Conception</td><td>Processus d'approximation</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Processus cognitif</td><td>Intériorisation : le recours à l'idée de l'aire</td></tr>
<tr><td>Condensation : Le recours à des approximations en utilisant une analogie avec des structures algébriques</td></tr>
<tr><td>Réification : l'aire d'une surface polygonale usuelle (rectangle)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Représentation sémiotique</td><td>Analogie avec la structure algébrique</td></tr>
<tr><td>Représentations numériques</td></tr>
</table>

Tableau 4 – Analogie avec la structure algébrique

La deuxième procédure utilisée se base sur l'approximation par l'aire d'une surface polygonale.

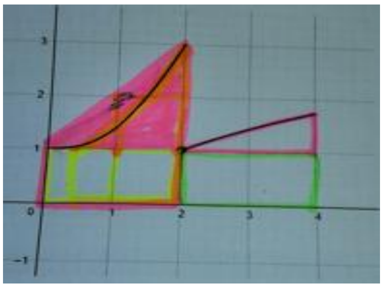


Figure 6 – Approximation par l'aire d'une surface polygonale

L'étudiant a décomposé l'aire totale en somme d'aires de rectangles, de triangles et de trapèzes (Fig. 6). Cette procédure se base sur l'interprétation de l'intégrale en tant qu'une aire algébrique, et évoque l'idée d'approximation, mais elle se limite à l'aire des figures géométriques usuelles. Soulignons que cette procédure sert à approcher la valeur de l'intégrale sans permettre dans beaucoup de cas de donner sa valeur exacte. La figure 6 montre en particulier, que les catégories « Conceptions » et « Représentations visuelles » sont activées simultanément. Cela indique que chaque conception possède ses propres représentations sémiotiques, et que les étudiants ont lié la définition formelle du concept à leur concept image.

La décomposition du concept image de cette réponse nous donne le tableau suivant :

<table>
<tr><td rowspan="5">Concept image</td><td>Conception</td><td>Aire</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Processus cognitif</td><td>Intériorisation : l'intégrale est considérée comme l'aire sous la courbe</td></tr>
<tr><td>Condensation : Le recours à des approximations en utilisant l'aire de quelques figures géométriques usuelles</td></tr>
<tr><td>Pas de réification</td></tr>
<tr><td>Représentation sémiotique</td><td>Représentation visuelle : représentation graphique.</td></tr>
</table>

Tableau 5 – Le concept image relatif à la conception d'aire

8.A.b. Exercice 2

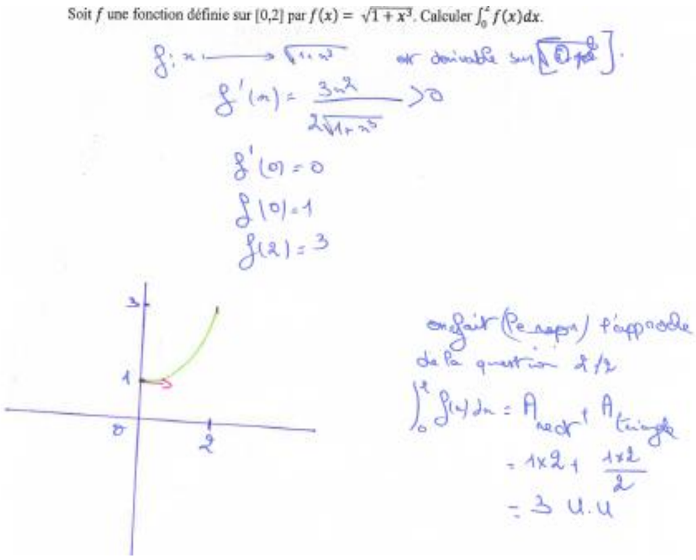
Les réponses des étudiants sont résumées dans le tableau suivant :

Conception	Aire	Primitive	Processus d'approximation	Pas de réponses
Nombre	2	7	0	5

Tableau 6 – Les réponses à l'exercice 2

Sept étudiants ont utilisé des procédures algébriques pour calculer la valeur de l'intégrale proposée, en tentant de chercher une primitive dont six ont choisi la méthode de changement de variables. Ces derniers ont tous échoué à trouver la forme d'une fonction usuelle. L'étudiant restant a choisi l'intégration par parties et a pensé à tort qu'il a trouvé une primitive de la fonction donnée.

Deux étudiants ont choisi de passer à la représentation graphique de la fonction proposée et ont utilisé l'aire sous la courbe pour répondre (Fig. 7 et 8). Le reste des étudiants n'a pas répondu à la question.



$f(x){:}\to\sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $[0,2]$.

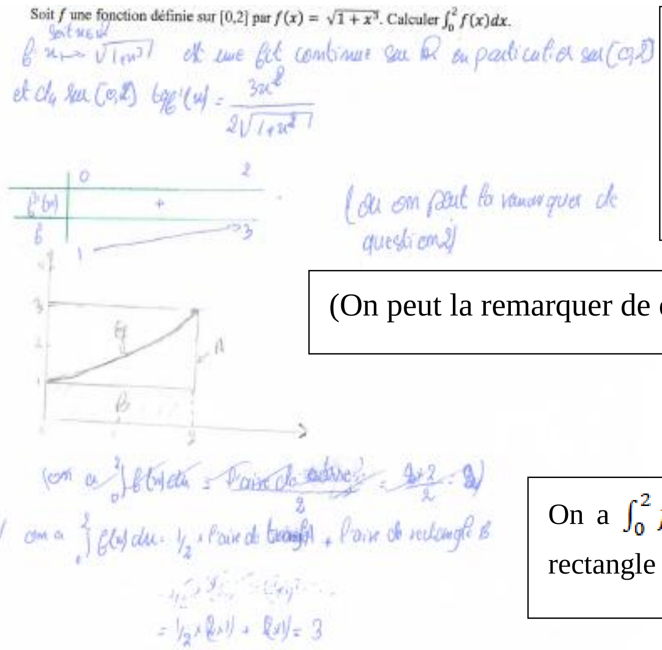
$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} > 0$.

$f'(0) = 0$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3$.

On fait l'approche de la question 2/2.

$$\int_0^2 f(x)dx = A_{rect1} + A_{rect2} = 1\times 2 + \frac{1\times 2}{2} = 3\,u.u$$

Figures 7 – Conception d'aire



Soit $x \in IR$. $f(x){:}\to\sqrt{1+x^2}$ est une fonction continue sur IR en particulier sur $[0,2]$ et dérivable sur $[0,2]$ tel que $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$.

(On peut la remarquer de question 2)

On a $\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\times$ l'aire du triangle $+$ l'aire de rectangle $= \frac{1}{2}\times(2\times 1) + (2\times 1) = 3$.

Figures 8 – Conception d'aire

Concept image	Conception	Aire
	Processus cognitif	Intériorisation : l’idée de l’aire sous la courbe
		Condensation : Le recours à des approximations en utilisant la somme de l’aire d’un rectangle et un triangle
		Pas de réification
	Représentation sémiotique	Représentation visuelle : représentation graphique.
		Le registre numérique

Tableau 6 – Le concept image relatif aux figures 7 et 8

8.B. Discussion

Pour calculer l’intégrale proposée dans la deuxième question, la majorité des étudiants a opté pour la recherche d’une primitive, en appliquant le TFA. Ce résultat ne nous a pas surpris pour deux raisons : d’une part, en général pour les étudiants, il y a identification entre intégrale et calcul de primitive (Akrouti, 2020) ; ainsi, dans la plupart du temps, les étudiants choisissent cette procédure comme solution idoine de la tâche, d’autre part, les étudiants se limitent souvent aux connaissances procédurales nécessaires à la résolution algébrique de certaines intégrales. Le recours au graphique est pour eux une technique difficile, voire non reconnue, sur laquelle ils risquent de buter.

En général, les procédures utilisées font partie de la « structure cognitive associée à un concept » (Davis & Vinner, 1986, p. 152), et de l'image du concept. La plupart des étudiants se réfèrent à la représentation algébrique, qui est étroitement lié au concept de primitive. Pour ces étudiants, le recours à des méthodes classiques représente une zone de confort qu’il ne faut pas courir le risque de la quitter. Cela montre également l'importance d'un large réseau de procédures qui règnent dans le concept image.

En plus, le TFA constitue la définition formelle de l’intégrale et est quasiment la seule méthode qu’ils ont apprise pour calculer une intégrale (Akrouti, 2021). Ceci est confirmé par leurs réponses à la première question proposée avant le test ; la représentation graphique leur constitue généralement un moyen pour interpréter l’intégrale en termes d’aire et non pour la fonder (Akrouti, 2016). Il faut noter que la question demandant aux étudiants les raisons pour lesquelles la résolution d'une intégrale définie par le calcul d’une primitive permet de calculer l’aire, n’a reçu aucune réponse.

Dans la conception d’aire, la majorité des étudiants ont développé des connaissances que Sfard et Linchevski (1994) qualifient comme d’ordre pseudo-structurel, et qui ne sous-tendent pas la structure sous-jacente de l’intégrale de Riemann. Cette conception pourrait cacher une difficulté liée au signe de la fonction à intégrer si on se limite à des fonctions positives. Les adaptations à faire lorsqu’il s’agit de fonctions négatives ou de celles qui changent de signes ne vont pas de soi pour les étudiants, et le travail relatif aux difficultés des signes de la fonction reste à faire.

Il s’ensuit que, comme prévu, aucun étudiant n’a utilisé un raisonnement fondé sur les sommes de Riemann pour calculer l’intégrale définie proposée dans la deuxième question. Pourtant, les notions de sommes de Riemann et d’intégrale définie font partie de leur programme et sont rencontrés dans leur cours sur les intégrales. A la question III précédant le test, les réponses fournies montrent qu’en majorité, ces étudiants ne sont pas en mesure de déchiffrer la relation que les notions de somme de Riemann et intégrale entretiennent, et les considèrent comme deux méthodes différentes pour trouver l'aire. D'autres étudiants considèrent les sommes de Riemann comme une méthode d'approximation d'une aire, alors que le TFA leur permet de calculer la valeur exacte d'une intégrale. Notons quand même qu'une minorité d'étudiants pense aux sommes de Riemann lorsque le calcul de primitive est inefficace. Il est clair que la distance qui sépare les connaissances des étudiants sur les sommes de Riemann de leurs conceptions sur le fondement de l'intégrale définie est non négligeable.

9. Conclusion et perspectives

La structure du concept d'intégrale paraît propice pour étudier la problématique de l'existence de conceptions multiples d'un même concept mathématique. Cette caractéristique a l'avantage de permettre de traiter une panoplie de situations d'enseignement. Dans le cas qui nous intéresse, on peut traiter des « problèmes de l'aire sous la courbe » qui peuvent être résolus en utilisant des graphiques, des « problèmes de sommes » qui peuvent être résolus dans le registre numérique, et des « problèmes d'intégrales des fonctions usuelles » qui peuvent être résolus en utilisant des procédures et des algorithmes qui se basent sur un raisonnement algébrique. D'un autre côté, chez les étudiants, les différentes conceptions de l'intégrale ne sont toujours pas également représentatives du concept, et la domination d'une conception particulière pourrait les induire en erreur. Nous expliquons ceci par l'impact du choix institutionnel adopté pour motiver l'introduction de l'intégrale définie, sur le développement des connaissances ultérieures du sujet apprenant. Dans ce cadre, l'analyse du test que nous avons proposé aux étudiants nous a permis de souligner que la conception de primitive, qui sous-tend un aspect opératoire de l'intégrale, est la plus favorisée par ces étudiants, même dans des situations où elle n'est pas efficace. Ceci est peut-être dû à la forte présence du raisonnement algébrique en classe, tout au long des cours précédant celui sur les intégrales. Notons quand même la différence entre ce que pensent les étudiants et ce qu'ils font réellement. En effet, dans les questions qui leur sont proposées avant le test, la majorité des étudiants mettent l'accent sur les limites du champ de validité des procédures algébriques. Leurs réponses à la question 2 du test montrent qu'en réalité, devant un problème qui relève des intégrales, c'est la recherche des primitives qui l'emporte, même si la fonction à intégrer ne le permet pas. Nous avons ainsi noté une incohérence chez les étudiants, entre les conceptions qu'ils jugent utiles pour répondre, et celles effectivement mobilisées dans leurs réponses. Pour eux, les conceptions particulières qui existent dans leur répertoire personnel, ne sont pas nécessairement mobilisées quand ils s'adressent aux autres. Ils peuvent choisir d'autres conceptions qui leurs paraissent plus confortables ou plus pertinentes au contexte proposé. En particulier, les représentations numériques, jamais rencontrées en classe pour traiter les intégrales, leur paraît inutiles, et le passage entre les différentes représentations possibles d'une intégrale leur constitue une difficulté, notamment quand il s'agit d'une représentation symbolique.

En résumé, notre étude nous a permis d'identifier deux types de conceptions :

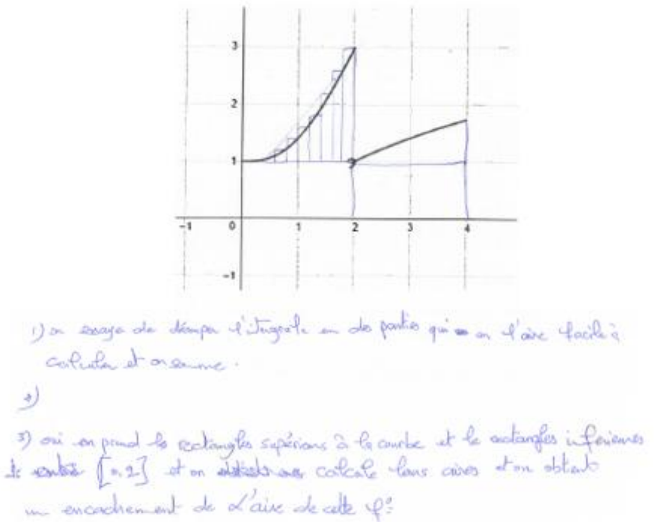
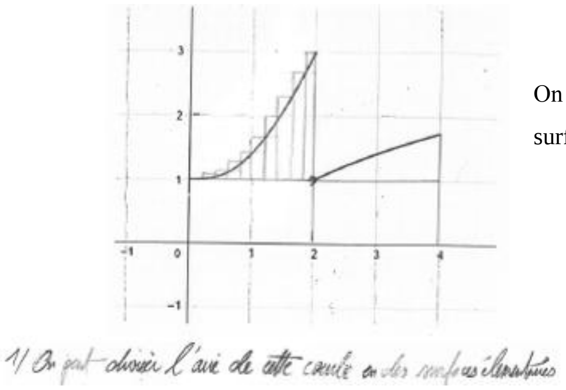
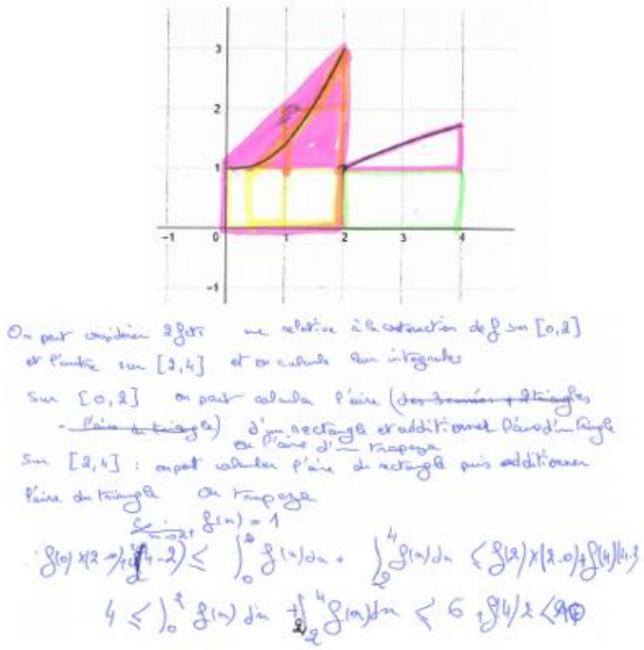
Une première conception qui se focalise sur un aspect algébrique. Elle met en avant le statut processus, limite les connaissances à leur aspect opérationnel, et se base sur le TFA en regardant l'intégration comme le processus inverse de la dérivée. Les étudiants ayant cette conception considèrent que la procédure algébrique leur permet de calculer une valeur exacte de l'intégrale, ce qui n'est pas le cas, pour eux, pour d'autres procédures possibles. Ces étudiants éprouvent des difficultés notables lorsqu'il s'agit d'un contexte non routinier, tel qu'il est le cas de l'exercice 2 du test.

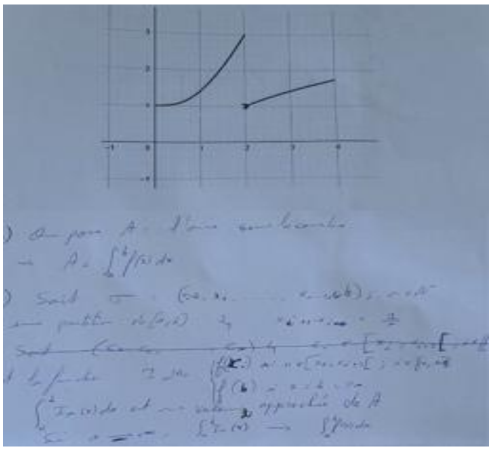
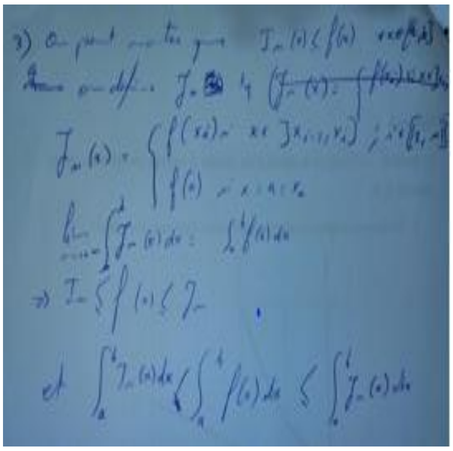
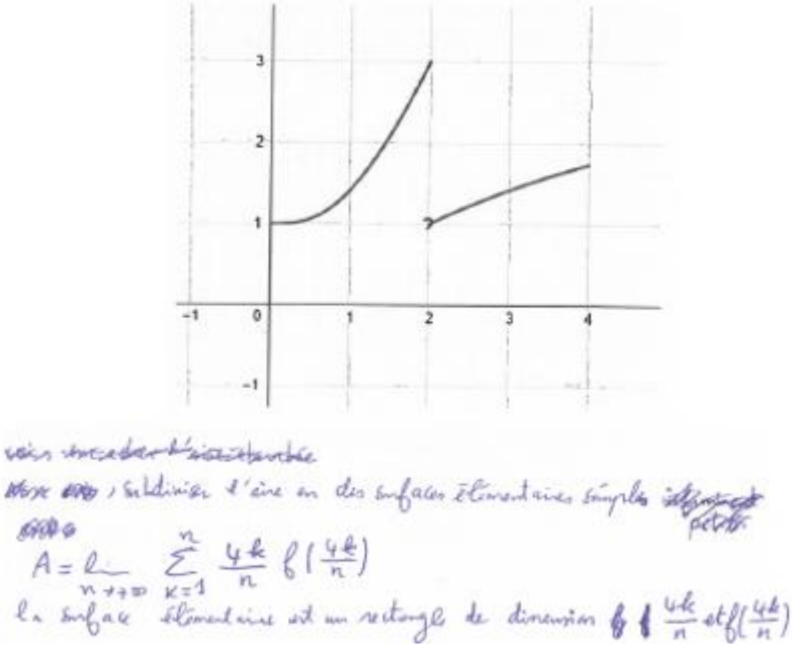
Une deuxième conception interprète l'intégrale de Riemann comme une aire, et pourrait renvoyer à deux procédures différentes correspondant chacune à un concept image évoqué différent (Jones, 2018) : la première se base sur l'approximation de l'intégrale en question par l'aire d'une surface polygonale ou une somme d'aires de surfaces polygonales. Cette procédure, que nous qualifions de procédure ponctuelle, se caractérise par l'approximation par un nombre limité d'aires de surfaces polygonales, ce qui ne permet pas de trouver de bonnes approximations. La deuxième procédure consiste à effectuer des subdivisions très fines de l'intervalle d'intégration pour mettre en œuvre un processus d'approximation, puis à appliquer la limite. Cette procédure, que nous qualifions de procédure globale, permet aux étudiants de mobiliser à la fois les statuts processus et objet de l'intégrale, de développer ainsi des connaissances d'ordre structural, et d'effectuer la conversion entre les registres graphique et numérique.

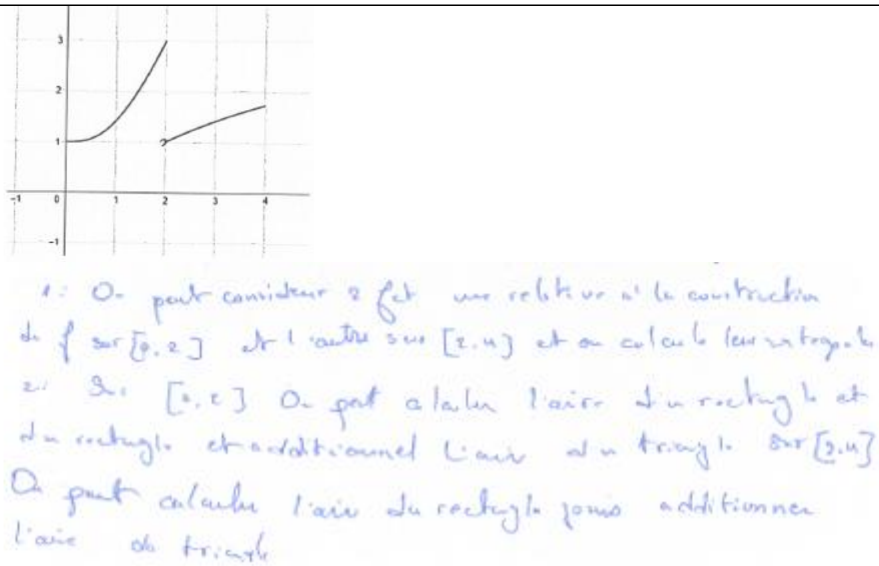
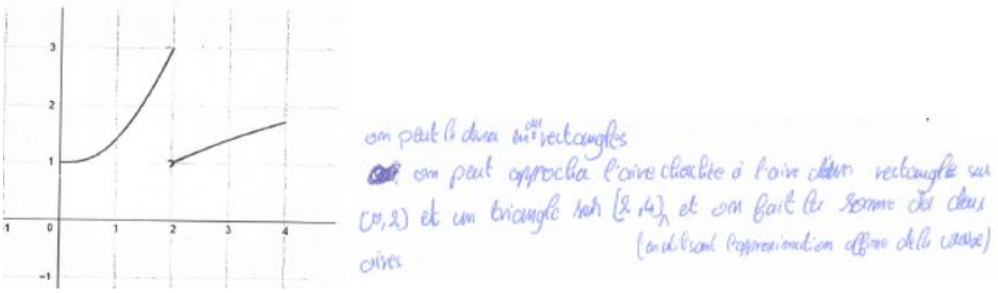
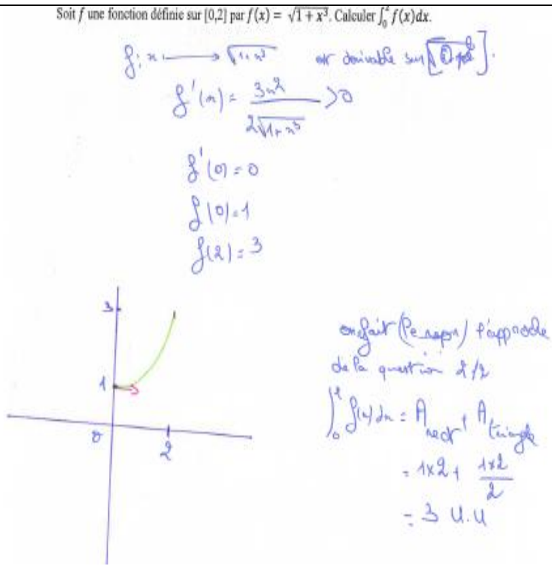
Cette conception d'aire peut être interprétée dans un cadre plus large qui considère l'intégrale comme une mesure d'une grandeur mathématique ou physique. Elle se base sur la procédure de processus d'approximation et permet de calculer la valeur exacte de l'intégrale, en la considérant, aux termes de (Legrand, 1990), « comme nombre frontière séparant l'ensemble des approximations intégrales par excès de l'ensemble des mêmes approximations par défaut » (p. 219).

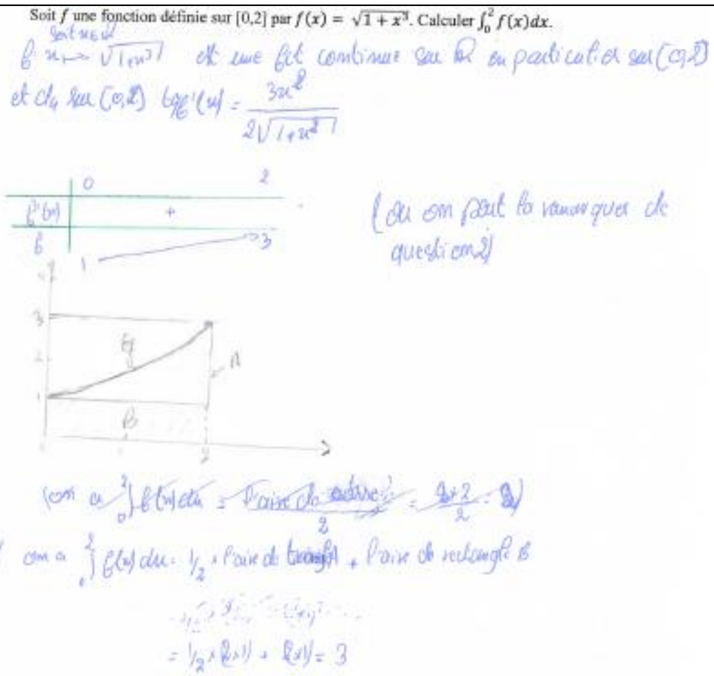
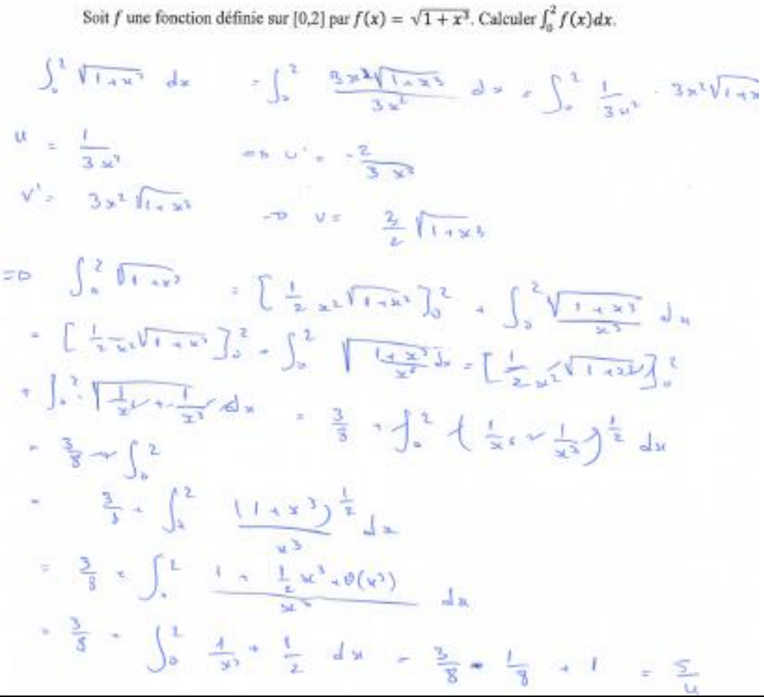
Au terme de ces résultats, il importe de revoir les recommandations officielles liées au cours d'intégration, et ce, pour prendre en considération l'aspect structurel des sommes de Riemann. Ceci permet effectivement à notre avis, de mettre en œuvre la structure sous-jacente de l'intégration. En effet, ce travail montre qu'il est judicieux d'examiner comment un enseignement de l'intégrale, dans lequel aucune attention particulière n'est accordée à sa structure multiplicative, pourrait être un facteur qui amène les étudiants à construire des conceptions qui ne sous-tendent pas le fondement de ce concept. Ce travail explique également les raisons qui poussent les étudiants à coller aux exemples à aspect calculatoires et des difficultés qu'ils éprouvent en dehors des exemples prototypiques. Dans ce cadre, on pourra s'interroger sur la possibilité d'élaborer une approche qui permette d'introduire l'intégrale de Riemann et les sommes de Riemann par des données numériques, à partir d'un contexte d'aire ou tout autre contexte de mesure d'une grandeur. Cette approche permettrait aux étudiants de se concentrer d'abord sur la relation multiplicative, qui est à la base du développement de ces sommes, puis sur la somme des produits obtenus qui met en œuvre d'une part, la relation entre discret et continu et d'autre part, le rapport entre le calcul approché et le calcul exact. Nous pensons que l'utilité de ces types de contexte provient du fait qu'ils montrent aux étudiants les sommes de Riemann comme des interprétations conceptuelles possibles de l'intégrale de Riemann, et non comme des techniques de calcul de convergence de certaines suites. Cette piste mérite d'être creusée.

Annexe A : Les traces écrites des étudiants

Exercice	Réponses
1-Abdelwathek	 On essaie de décomposer l'intégrale en parties qui ont l'aire facile à calculer et on somme. On prend les rectangles supérieurs à la courbe et les rectangles inférieurs dans [0,2] et on calcule leurs aires
1- Hakim	 On peut diviser l'aire de cette courbe en des surfaces élémentaires.
1- Rym	

	On peut considérer deux fonctions une relative à la fonction f sur [0,2] et l'autre sur [2,4] et on calcule leurs intégrales. Sur [0,2] : on peut calculer l'aire d'un rectangle et additionner l'aire d'un triangle ou d'un trapèze. Sur [2,4] on peut calculer l'aire d'un rectangle puis additionner l'aire d'un rectangle ou d'un trapèze. $f(0) \times f(2) + (4-2) \leq \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx \leq f(2) \times (2-0) + f(4)(4-2)$. $4 \leq \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx \leq 6 + f(4)2 < 10$.
1- Ahmed D.	  On peut considérer deux fonctions une relative à la fonction f sur [0,2] et l'autre sur [2,4], et on calcule leurs intégrales. Sur [0,2] : on peut calculer l'aire d'un rectangle et additionner l'aire d'un triangle ou d'un trapèze. Sur [2,4] on peut calculer l'aire d'un rectangle puis additionner l'aire d'un rectangle ou d'un trapèze. $f(0) \times f(2) + (4-2) \leq \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx \leq f(2) \times (2-0) + f(4)(4-2)$. $4 \leq \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx \leq 6 + f(4)2 < 10$.
1- Abdelhamid	 Subdiviser l'aire en des surfaces élémentaires simples. $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{n} f(\frac{4k}{n})$. La surface élémentaire est un rectangle de dimension $\frac{4k}{n}$ et f($\frac{4k}{n}$).

1-Khalifa	 On peut construire 2 fonctions une relative à la construction de f sur [0,2] et l’autre sur [2,4] et on calcule rectangle. Sur [0,2], on peut calculer l’aire du rectangle et du rectangle et on additionne l’aire du triangle sur [2,4]. On peut calculer l’aire du rectangle puis additionner l’aire du triangle.
1- Ahmed M.	 On peut le diviser en des rectangles. On peut approcher l’aire cherchée à l’aire d’un rectangle sur [0,2] et d’un triangle sur [2,4] (on utilise l’approximation affine de la courbe) et on fait la somme des deux aires.
1- Rym	 $f(x) :\rightarrow \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur [0,2]. $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} > 0$. $f'(0) = 0$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3$.

	On fait l'approche de la question 2/2. $\int_0^2 f(x)dx = A_{rect1} + A_{rect2} = 1 \times 2 + \frac{1\times 2}{2} = 3\ u.u$
1- Ahmed M	 Soit f une fonction définie sur $[0,2]$ par $f(x) = \sqrt{1+x^3}$. Calculer $\int_0^2 f(x)dx$. Soit $x \in IR$. $f(x): \to \sqrt{1+x^2}$ est une fonction continue sur IR en particulier sur $[0,2]$ et dérivable sur $[0,2]$ tel que $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$. (On peut la remarquer de question 2) On a $\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\times$ l'aire du triangle + l'aire de rectangle $= \frac{1}{2}\times(2\times 1)+(2\times 1) = 3$
2- Khalifa	 Soit f une fonction définie sur $[0,2]$ par $f(x) = \sqrt{1+x^3}$. Calculer $\int_0^2 f(x)dx$.

2- Ahmed	Soit f une fonction définie sur $[0,2]$ par $f(x) = \sqrt{1+x^3}$. Calculer $\int_0^2 f(x)dx$. 
2- Abdelhamid	Soit f une fonction définie sur $[0,2]$ par $f(x) = \sqrt{1+x^3}$. Calculer $\int_0^2 f(x)dx$. $I = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$ on pose $u(x) = \sqrt{1+x^3} \rightarrow u'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$ $v'(x) = 1 \rightarrow v(x) = x$ $\Rightarrow I = [x\sqrt{1+x^3}]_0^2 - \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$
2- Hakim	Soit f une fonction définie sur $[0,2]$ par $f(x) = \sqrt{1+x^3}$. Calculer $\int_0^2 f(x)dx$. $\sqrt{1+x^3} = \sqrt{1+(x^{\frac{3}{2}})^2}$ On pose $y = x^{\frac{3}{2}}$ $dy = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
2- Ahmed D	Soit f une fonction définie sur $[0,2]$ par $f(x) = \sqrt{1+x^3}$. Calculer $\int_0^2 f(x)dx$ $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx = \int_0^2 \sqrt{(1+x)(x^2-x+1)}\,dx$
2- Abdelwathek	Soit f une fonction définie sur $[0,2]$ par $f(x) = \sqrt{1+x^3}$. Calculer $\int_0^2 f(x)dx$. $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ $\int_0^2 \sqrt{x^3+1}\,dx = \int_0^2 \sqrt{(x^{\frac{3}{2}})^2+1}\,dx$ on pose $tg(u) = x^{\frac{3}{2}}$

Références

Akrouti, I. (2016). *Transition secondaire/supérieur en analyse : cas de l'intégrale de Riemann en classes préparatoires* [Mémoire de master en didactique des mathématiques, de l'Université Virtuelle de Tunis (ISEFC)].

Akrouti, I. (2019). Les difficultés liées à l'apprentissage de l'intégrale définie à l'entrée en classe préparatoire. In Abboud, M. (Ed), *Septième édition du colloque l'Espace Mathématique Francophone, Paris Octobre 2018* (pp. 615-619). IREM de Paris ISBN : 978-2866123918.

Akrouti, I. (2020). Conceptions de l’intégrale de Riemann des étudiants en Classe préparatoire. In T. Hausberger, M. Bosch, & F. Chelloughi (Eds.), *Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020, 12-19 September 2020)* (pp. 53-62). University of Carthage and INDRUM.

Akrouti, I. (2021a). Que représente le concept d’intégrale définie pour les étudiants à l’entrée à l’université ? *ITM Web of Conferences, 39* (01010). https://doi.org/10.1051/itmconf/20213901010

Akrouti, I. (2021b). *L’enseignement de l’intégral à l’entrée à l’université en Tunisie. Quelle approche ? Quelle alternative ?* [Thèse de l’Université Virtuelle de Tunis (ISEFC)].

Akrouti, I. (2022). La situation du barreau : une alternative possible pour l’enseignement de l’intégrale à l’entrée à l’université. *Revue québécoise de didactique des mathématiques, 1* (1), pp. 72-110.

Carnot, (1839). *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*. Bachelier, Imprimeur-Librairie, troisième édition.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique de la didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19* (2), 221-265.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *The Journal of Mathematical Behavior*, *5*, 281–303.

De Freycinet, M. C. (1860). *De l’analyse infinitésimale. Etude sur la métaphysique du haut calcul*. Mallet- Bachelier, Imprimeur-Librairie.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, *5*, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et la pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Peter Lang S.A.

Duval, R. (2006). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 349-380.

Ghedamsi, I. (2008). *Enseignement du début de l’analyse réelle à l’entrée à l’université*. [Thèse en cotutelle de l’Université Bordeaux 2 et de l’Université de Tunis (ISEFC)].

Jones, S. R. (2013). Understanding the integral: Students’ symbolic forms. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*, 122-141.

Jones, S. R. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *Journal of Mathematical Behavior*, *38*, 9-28.

Jones, S. R. (2018). Prototype images in mathematics education: the case of the graphical representation of the definite integral. *Educational Studies in Mathematics*, *97*, 215–234. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9794-z

Klinger, M. (2019). *Grundvorstellungen versus Concept Image?* Gemeinsamkeiten und Grundvorstellungen versus Concept Image? Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Theorien am Beispiel des Funktionsbegriffs. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht, & P. Scherer (Eds.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht* (pp. 61–75).

Legrand, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *3*(9), 365‐ 406.

Orton, A. (1983a). Students' Understanding of Differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 235-250.

Rasslan, S. et Tall, D. (2002). *Definitions and images for the definite integral concept*. In A. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Education: PME 26* (pp. 89-96).

Sealy, V., & Engelke, N. (2012). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *MathAMATYC Educator*. *American Mathematical association of Two-Year Colleges*, *3*(3), pp. 18-22.

Sealey, V. (2006). Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: What is necessary and sufficient. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 46-53). Universidad Pedagógica Nacional.

Sealy, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*(1), pp. 230–245.

Sealy, V., et Oehrtman, M. (2005). Student understanding of accumulation and Riemann sums. In G. Lloyd, M. Wilson, J. Wilkins, & S. Behm (Eds.), *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 84–91.

Sealey, V., & Oehrtman, M. (2007). Calculus students' assimilation of the Riemann integral into a previously established limit structure. In T. Lamberg, & L. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 78-84). University of Nevada, Reno.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, pp. 1-36.

Sfard, A. et Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, pp. 191-228.

Simmons, C. et Oehrtman, M. (2019). *Quantitatively Based Summation: A framework for student conception of definite integrals*. In J. Monaghan, E. Nardi, & T. Dreyfus (Eds.), *the Conference on Calculus in Upper Secondary and Beginning University Mathematics* (pp.124-127). Matric and University of Agder.

Tall, D. et Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, pp. 151-169.

Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. *Plenary presentation in Working Group 3, ICME, Québec, August 1992.*

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, pp. 229–274.

Thompson, P. W. et Silverman, J. (2008). *The concept of accumulation in calculus*. In M. P. Carlson, & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43-52). Mathematical Association of America.

Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), pp. 239-305.

Vinner, S., et Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), pp. 356-366.

Affiliations
Inen Akrouti
Université de Jendouba, Institut Supérieur de Sciences Humaines de Jendouba (ISSHJ) / Université de Carthage (LaRINa)
e-mail : inenakrouti@isshj.u-jendouba.tn

Slim Mrabet
Université de Carthage
e-mail : mrabet_slim@yahoo.fr