Physique en première année d'université : que nous apprend une analyse ancrée en didactique des mathématiques ?

Ghislaine Gueudet, Nathalie Lebrun & Fabrice Vandebrouck

Abstract. This text reports on a workshop of the DEMIMES thematic school, the aim of which was to discuss how didactic theories can equip teachers in higher education to analyse exercises and problems texts and anticipate student difficulties. We present an analysis of a first-year university physics problem using theoretical tools from mathematics didactics: the anthropological theory of the didactic and the activity theory specific to didactics. We have chosen a Newtonian mechanics problem concerning the fall of a ball in a liquid, whose mathematical treatment involves vectors and a differential equation. We introduce the theoretical tools used and the problem chosen, then present the analyses, and discuss the contributions of the two theories. The workshop also showed that didactic analyses could shed light on the differences between the mathematics used in mathematics courses and those used in physics courses at university.

Keywords. Activity theory in didactics, Anthropological theory of the didactic, Mathematics as a service subject, Physics.

Résumé. Ce texte rend compte d'un atelier de l'école thématique DEMIMES, dont l'objectif était de discuter comment les théories de didactique peuvent outiller les enseignants du supérieur pour analyser des énoncés et anticiper des difficultés d'étudiants. Nous présentons l'analyse d'un énoncé de physique de niveau première année d'université avec des outils théoriques issus de la didactique des mathématiques : la théorie anthropologique du didactique et la théorie de l'activité spécifiée à la didactique. Nous avons retenu un énoncé de mécanique Newtonienne portant sur la chute d'une bille dans un liquide, dont le traitement mathématique implique notamment des vecteurs et une équation différentielle. Nous introduisons les outils théoriques mobilisés et l'énoncé choisi, avant de présenter les analyses et de discuter les apports des deux théories choisies. L'atelier a de plus montré que les analyses didactiques pouvaient éclairer les différences entre les mathématiques des cours de mathématiques et celles utilisées en cours de physique à l'université.

Mots-clés. Mathématiques comme discipline de service, Physique, Théorie de l'activité en didactique, Théorie anthropologique du didactique.

Table des matières

1. Introduction 2
2. Physique et mathématiques à l'université 2
3. Approches théoriques 3
  3.A Théorie anthropologique du didactique et praxéologies (TAD) 3
  3.B Théorie de l'activité en didactique des mathématiques (TA) 4
4. Présentation d'un problème de physique, niveau L1 5
5. Analyses avec la TAD et la TA 7
  5.A Question a) 7
  5.B Question b) 9
  5.C Question g) 11
  5.D Quelques commentaires sur les apports de la TAD et de la TA 12
6. Discussion sur les analyses 13
  6.A Appliquer à la physique des théories de didactique des mathématiques 13
  6.B Les spécificités des mathématiques utilisées en physique 14

Annexe : L'énoncé et son corrigé 16
Références 19

1. Introduction

Ce texte rend compte d'un atelier qui s'est déroulé dans le contexte de l'école thématique DEMIMES. Il s'inscrit donc dans la perspective de cette école, qui proposait à un public intéressé par l'enseignement des mathématiques et de leurs interactions au niveau de l'université de se pencher sur les apports possibles des démarches d'analyse didactique. Plus précisément, cet atelier était ancré dans les travaux menés au sein du GDR DEMIPS (Didactique et Epistémologie des Mathématiques, liens avec l'Informatique et la Physique, dans le Supérieur). Les auteurs de ce texte (et animateurs de l'atelier) sont respectivement membres du thème 1 de DEMIPS qui concerne l'analyse, et du thème 5 qui concerne les pratiques enseignantes en mathématiques pour des étudiants non-spécialistes et en physique. Nous avons donc proposé aux participants de l'atelier de travailler sur un support de physique, et d'analyser ce support en mobilisant des outils théoriques issus de la didactique des mathématiques : la théorie anthropologique du didactique (TAD) d'une part, et la théorie de l'activité (TA) spécifiée à la didactique d'autre part. Au-delà d'un objectif d'appropriation de ces théories, il s'agit d'interroger ce qu'elles apportent pour l'analyse d'un problème de physique : quelles peuvent être les démarches des étudiants, à quelles difficultés peut-on s'attendre ? Nous souhaitons de plus proposer une réflexion sur les mathématiques mobilisées dans ce problème de physique, et élargir celle-ci à la question complexe des différences entre les mathématiques rencontrées en cours de mathématiques et celles utilisées en cours de physique. Le public de l'atelier étant surtout composé de collègues en mathématiques, il s'agit de leur faire prendre conscience de l'usage des mathématiques et des implicites en physique qui peuvent être sources de difficulté chez les étudiants.

Dans ce qui suit, nous présentons l'arrière-plan de l'atelier : la question des liens entre physique et mathématiques à l'université, les principes élémentaires des deux théories qui seront utilisées par la suite. Une description du problème de physique suit, avant les analyses de trois des questions de ce problème, menées successivement avec la TAD puis la TA. Nous proposons finalement une discussion générale sur ce que de telles analyses didactiques nous enseignent, concernant le lien entre mathématiques et physique à l'université, mais également l'application de théories issues de la didactique des mathématiques à un contexte de physique.

2. Physique et mathématiques à l'université

Les contenus actuellement enseignés au sein des disciplines nommées respectivement « physique » et « mathématiques » à l'université sont issus d'un développement historique au cours duquel de nombreuses interactions ont eu lieu. Cependant des différences épistémologiques importantes existent entre ces deux disciplines. Pollani et Branchetti (2022), suivant une catégorisation introduite par Erduran et Dagher (2014), identifient des différences entre les buts et valeurs (par exemple en physique le but de modéliser des phénomènes est central), les pratiques (comme la démonstration en mathématiques), les méthodes et les savoirs.

Dans le domaine de la recherche en éducation, la didactique est caractérisée par une attention importante accordée aux savoirs en jeu. Les recherches en didactique prennent en compte l'épistémologie de la discipline qu'elles considèrent. La didactique de la physique et la didactique des mathématiques n'utilisent pas a priori les mêmes théories, cependant TA et TAD ont déjà été employées dans des recherches en didactique de la physique. Par exemple, Pélissier & Venturini (2016) réalisent ainsi une analyse praxéologique de l'enseignement de l'épistémologie de la physique au lycée, plus spécifiquement de la notion de modèle. Di Fabio et al. (2021) mobilisent la TAD pour analyser les difficultés d'étudiants de Licence 1 de physique relatives aux vecteurs en cinématique. Du côté TA, De Hosson et al. (2018) étudie les pratiques des enseignants de physique du supérieur en cours magistral de mécanique Newtonienne avec la notion de proximités discursives. Il nous a ainsi semblé intéressant de proposer aux participants de l'atelier de travailler à l'analyse d'un exercice de physique avec des outils théoriques issus de la TAD et de la TA (la possibilité de cette analyse étant garantie par l'existence des travaux cités précédemment), puis de s'interroger sur les apports de ces théories dans le cas de la physique.

À l'université tous les enseignements de physique utilisent des mathématiques, qui vont de contenus élémentaires comme le calcul algébrique à des contenus avancés comme les équations différentielles. Cependant les mathématiques utilisées dans les cours de physique diffèrent des mathématiques rencontrées par les étudiants dans les cours de mathématiques, et ceci peut engendrer des difficultés pour les étudiants (voir par exemple au sujet de la dérivée Hitier & González-Martín, 2022). Les différences relevées peuvent être liées aux différences épistémologiques mentionnées ci-dessus : par exemple en physique le contexte fournit de nombreuses informations et des moyens de contrôle des résultats obtenus. Cependant d'autres différences découlent de la manière dont ces disciplines sont enseignées : c'est le cas par exemple des différences de notation, ou des différences concernant les usages d'un même concept (Caussarieu, 2020). Les analyses menées dans l'atelier nous ont également conduits à discuter ces différences.

3. Approches théoriques

3.A Théorie anthropologique du didactique et praxéologies (TAD)

La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD, Chevallard, 2001) considère que les savoirs sont façonnés par les institutions dans lesquelles ils vivent. L'un des premiers concepts introduits en TAD est ainsi celui de transposition didactique : il s'agit de dire que les savoirs des experts (typiquement dans notre cas les chercheurs en mathématiques) sont nécessairement transformés lorsqu'ils sont introduits dans une institution d'enseignement. Par exemple, dans le cadre des programmes en vigueur en France en 2022, la notion de vecteur est introduite en classe de seconde et un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa direction, qui est celle de la droite (AB), son sens, de A vers B, et sa norme, la longueur du segment [AB]. Cependant, on ne trouvera ni dans les programmes ni dans les manuels une définition de la notion de direction d'une droite ; parfois simplement une remarque du type « deux droites parallèles ont même direction ». Il ne s'agit évidemment pas à ce niveau d'introduire l'algèbre linéaire et de formaliser la notion de direction.

L'étude de la manière dont les savoirs sont façonnés par les institutions est outillée en TAD par le concept de praxéologie (Chevallard, 2001). Une praxéologie est une entité formée de quatre éléments : un type de tâches T (e.g. « Résoudre une équation différentielle (E) de type $y' = ay + b$ avec a non nul») ; une ou plusieurs techniques τ pour accomplir ce type de tâches (e.g. « Rechercher une solution particulière constante, puis résoudre l'équation $y' = ay$ ») ; un discours θ qui justifie cette technique, appelé discours technologique, ou technologie en TAD (e.g. « une équation de type $y' = ay + b$ admet une solution particulière constante, et la somme de cette solution et de la solution générale de $y' = ay$ est la solution générale de $y' = ay + b$ etc. ») ; et finalement une théorie Θ dont est issu le discours technologique.

Notons que mettre en œuvre une technique conduit souvent à rencontrer un ou plusieurs types de tâches, différents du type de tâche d'origine : ainsi dans notre exemple, « trouver une solution constante » puis « résoudre l'équation $y' = ay$ » sont deux types de tâches qui font partie de la technique, pour le type de tâche initial « résoudre l'équation $y' = ay + b$ ». Chaachoua (2018) propose d'utiliser l'expression « ingrédients de technique » pour souligner le rôle de ces types de tâches.

La TAD a été développée dans le contexte de la didactique des mathématiques. Toutefois, Chevallard (2001) postule d'emblée que la TAD peut s'appliquer à tout type d'activité humaine, en attribuant un sens très large au terme d'institution. Ainsi en TAD, une famille, un club sportif ou un monastère sont des institutions. Tout être humain est sujet de plusieurs institutions différentes, ce qui peut l'amener à rencontrer le même savoir sous des formes diverses. Ici, dans l'institution « Licence 1 scientifique (L1) » nous distinguons potentiellement deux sous-institutions, « Cours de mathématiques en L1 » et « Cours de physique en L1 ». Nous allons nous attacher à examiner très concrètement comment la TAD peut être utilisée pour analyser un problème de physique de niveau L1. Nous observerons par ailleurs les différences entre les mathématiques qui apparaissent au fil de cette analyse et ce qui est couramment pratiqué en cours de mathématiques en L1, différences qui peuvent susciter des difficultés pour les étudiants de L1 puisqu'ils appartiennent à chacune des deux institutions évoquées ci-dessus.

3.B Théorie de l'activité en didactique des mathématiques (TA)

La théorie de l'activité en didactique des mathématiques (TA, Vandebrouck, 2008) donne une approche complémentaire de celle apportée par la TAD (Doukhan, 2022). L'activité des étudiants n'est pas modélisée en termes de praxéologies mais elle est appréhendée du point de vue des sujets acteurs (les étudiants), compte tenu de leurs connaissances et du contexte de leur activité. L'approche TA apporte ainsi plus spécifiquement une dimension cognitive et une dimension médiative[1] aux analyses de l'activité des étudiants en contexte (on dit aussi « en situation »). La tâche à réaliser n'est pas simplement une instanciation d'un certain type de tâche vue d'un point de vue institutionnel mais elle est le but qu'il s'agit d'atteindre du point de vue du sujet (l'étudiant) en tenant compte de ses connaissances et du contexte au sein duquel il se trouve (notamment le moment de l'exécution de la tâche dans le scénario global organisé par l'enseignant).

Dans le cadre de la TA, on cherche ainsi à identifier quelles sont les connaissances que les étudiants doivent mettre en fonctionnement pour réaliser la tâche. On distingue les connaissances anciennes et les connaissances qui sont encore enjeu de l'apprentissage au moment de la situation. On identifie les connaissances explicitement appelées par les énoncés (on parle de connaissances qui doivent être seulement mobilisables) et les connaissances que les étudiants doivent utiliser sans indice (on parle de connaissances qui doivent être disponibles). On « mesure » la complexité de la tâche en

[1] Liées aux interactions entre l'élève et son environnement, notamment les échanges avec le professeur.

identifiant, compte tenu du contexte, si la tâche est routinière (elle a déjà été rencontrée plusieurs fois par les étudiants) ou bien si la tâche a des aspects de nouveauté et s'il y a des adaptations nécessaires des connaissances à mettre en fonctionnement. Par exemple, résoudre, pour des étudiants de première année, en cours de mathématique, l'équation différentielle linéaire $y' = 5y + 3$, est une tâche routinière (les paramètres numériques ne constituent pas à ce niveau des adaptations notables). Résoudre, par contre, de façon générique, l'équation $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$ pendant un cours de physique est une tâche plus complexe car les étudiants doivent d'une part reconnaître la forme de l'équation différentielle linéaire, avec une notation différentielle différente de celle du cours de mathématique et la présence de deux paramètres à identifier ; puis d'autre part résoudre l'équation avec les adaptations liées à la présence de ces deux paramètres qui complexifient le traitement attendu et la forme des solutions (comportant notamment l'introduction d'un autre paramètre qui n'a pas le même statut). Cette complexité peut être toutefois relativisée si le même type de tâche (dans un sens proche de la TAD) a déjà été rencontré, voire routinisé par les étudiants durant les cours de physique. Ainsi les activités (au sens cognitif) attendues de la part des étudiants ne sont pas de même nature selon la tâche (au sein même parfois d'un seul type de tâche) et sa complexité compte tenu du contexte de la réalisation (notamment le scénario au sein duquel elle surgit). Une telle analyse permet de pointer et comprendre les difficultés que peuvent rencontrer les étudiants lors de l'exécution de la tâche.

Les analyses en termes de TA embarquent également une dimension médiative en donnant un rôle important au professeur et aux outils de réalisation de la tâche. On l'a vu déjà au niveau de l'analyse de tâche, qui dépend du contexte, et donc notamment de tout ce que peut organiser le professeur « autour » de la tâche. Mais les analyses en termes de TA permettent de moduler les activités attendues de la part des étudiants en prenant en compte les déroulements des séances pendant lesquelles sont réalisées les exécutions des tâches. Ainsi tous les éléments de discours entre les étudiants mais surtout entre le professeur et les étudiants peuvent transformer les activités attendues de la part des étudiants. Par exemple, dans la résolution de l'équation $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$ pendant le cours de physique, le professeur peut d'emblée faire remarquer aux étudiants qu'il s'agit d'une équation différentielle linéaire et qu'ils doivent appliquer la technique (au sens de la TAD) du cours de mathématiques, les paramètres en plus. Les activités liées à la reconnaissance autonome par les étudiants de ces types d'équations (favorisant la disponibilité) ne sont plus à la charge des étudiants et ceux-ci en sont privés. Il reste à leur charge la résolution avec les paramètres ce qui constitue tout de même une complexité (adaptation de la technique). Dans la suite du papier nous ne considérons pas cette dimension médiative de la TA puisqu'on ne va s'intéresser qu'à l'énoncé d'un exercice proposé à des étudiants de L1 sans disposer d'éléments sur sa mise en œuvre en classe. En conséquence, le lecteur pourra avoir l'impression d'un déséquilibre entre les utilisations des deux théories mais cela résulte du type de matériel analysé.

4. Présentation d'un problème de physique, niveau L1

Le problème que nous considérons ici concerne la chute d'une bille dans un liquide. Ce problème peut être soumis à des étudiants de L1 lors d'un cours abordant les champs, les forces et l'énergie. Ces trois concepts dépassent largement le cadre de la mécanique classique et trouvent leur application dans les domaines de la thermodynamique, de l'électricité, du magnétisme, et de l'optique. Il s'agit donc de repartir de ces concepts en mécanique classique en revenant sur des définitions et principes fondamentaux tels que l'étude de mouvement faisant appel à la cinématique et la dynamique. C'est dans ce contexte que des notions de base, déjà abordées au lycée, et la méthodologie utilisée pour traiter un problème de mécanique sont réinvesties en L1. Dans l'exemple choisi, il s'agit d'étudier le mouvement d'un objet lors d'une chute libre verticale dans un fluide au cours du temps et de déterminer la viscosité de ce fluide. La situation de départ est la suivante :

Une bille en verre (masse volumique μ, rayon r) est lâchée, sans vitesse initiale, dans un tube vertical contenant de l'huile de ricin (masse volumique μ_0). On donne : r = 1 mm ; μ = 2600 kg / m^3 ; μ_0 = 970 kg / m^3 ; g = 9,81 $m.s^{-2}$.

Dans un premier temps il est demandé de rappeler les expressions des forces qui s'exercent sur la bille dans le cadre d'une chute dans un liquide sans force de frottement (question a).

La question suivante (b) complexifie le problème en introduisant une force de frottement fluide linéaire valable pour des vitesses faibles. Il s'agit dans ces conditions de déterminer l'équation mathématique du mouvement en suivant un certain nombre d'étapes. Sans que cela soit demandé explicitement, il s'agit tout d'abord de faire une analyse physique du problème. Il s'agit ainsi de déterminer le système étudié (la bille) et de définir par rapport à quoi on étudie le mouvement du système, c'est-à-dire le référentiel d'étude (ici le référentiel terrestre considéré galiléen). Ces précisions étant faites, il s'agit dans un second temps de partir du principe fondamental de la dynamique (seconde loi de Newton) $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ qui régit le mouvement. $\Sigma\vec{F}$ représente la somme des forces qui agissent sur la bille : le poids et la poussée d'Archimède qui doivent être déterminés à la question a) et la force de frottement linéaire donnée dans l'énoncé de la question b). $\vec{a}$ représente l'accélération de la bille et m sa masse. Pour s'affranchir des vecteurs, il est associé au référentiel un repère muni d'une origine O et d'une base à une dimension représentée par le vecteur unitaire $\vec{j}$ puisque le mouvement se fait verticalement par rapport à la terre (chute verticale). Le sens de $\vec{j}$ est pris dans le sens du mouvement. Ce choix est complètement arbitraire. Ce repère d'étude étant choisi, il est alors possible de projeter les grandeurs (forces, vecteur accélération) de la relation fondamentale de la dynamique. Après projection de cette équation vectorielle sur $(O,\vec{j})$ et divers calculs, nous arrivons à l'expression de l'équation du mouvement en fonction de la vitesse v et des constantes définies dans l'énoncé. On obtient ainsi une équation différentielle du premier ordre dont il est proposé de vérifier que les dimensions de ses deux membres sont les mêmes. A ce stade, cela permet à l'étudiant de vérifier l'homogénéité de l'équation (au sens de la physique) et de détecter les éventuelles erreurs dans le cas où les deux membres n'ont pas la même dimension.

Dans les deux questions suivantes il s'agit de compléter l'équation du mouvement en déterminant les conditions initiales du mouvement, la valeur limite de la vitesse de chute et les constantes de l'équation du mouvement obtenue à la question b) qui serviront ensuite pour étudier la vitesse de chute de la bille au cours du temps dans la dernière question du problème (question g).

C'est ainsi que dans la question c) il est demandé de compléter les conditions initiales de la bille (à l'instant $t = 0\ s$). La vitesse initiale étant connue (prise nulle au moment du lâcher de la bille pris comme temps initial), il s'agit de déterminer l'accélération de la bille au même instant. Ces conditions initiales seront reprises dans la question g).

La question d) est consacrée à la détermination de la vitesse limite v_L de la bille pour laquelle l'accélération est nulle, c'est-à-dire une vitesse de la bille constante. Dans ce cas, la somme des forces appliquées sur la bille est nulle. Dans l'équation du mouvement déterminée dans la question b), la dérivée de la vitesse par rapport au temps est nulle et il vient alors une expression simple de la vitesse limite que l'on demande d'exprimer en fonction des données physiques du problème.

Avant d'étudier l'évolution de la vitesse de chute au cours du temps, il est demandé dans la question e) de déterminer la viscosité de l'huile de ricin notée η. La vitesse limite étant donnée dans la question e), il est possible de déterminer la valeur numérique de cette viscosité après avoir modifié l'expression analytique de la vitesse limite v_L obtenue en isolant d'un côté de l'équation la viscosité η et de l'autre les autres données du problème et la vitesse limite v_L.

En utilisant les données des questions c) et d) et en repartant de l'équation du mouvement obtenue à la question b), il s'agit dans la question g) de déterminer l'expression analytique de la vitesse de chute de la bille au cours du temps. Le choix a été fait de partir d'une solution particulière et de vérifier que celle-ci est bien solution de l'équation différentielle du premier ordre qui décrit le mouvement. Au lieu de cette méthode pour trouver l'expression analytique de la vitesse au cours du temps, il aurait pu être demandé de résoudre l'équation différentielle du premier ordre avec second membre non nul sans donner au préalable la solution particulière. Le choix de méthode est guidé par le fait que les étudiants peuvent avoir des difficultés de résolution d'équation différentielle. En général, le cours de mécanique arrive assez tôt dans l'année et il n'est pas certain que les étudiants maîtrisent parfaitement la résolution d'équation différentielle ou ne l'ont pas encore abordé à ce stade dans le cours de mathématiques. Il s'agit donc dans cette question d'intégrer tout simplement la solution particulière dans l'équation du mouvement et de faire appel à des outils mathématiques plus simples, ici la dérivée, pour arriver au résultat attendu. Il suffit aussi d'utiliser les conditions initiales déterminées précédemment pour trouver les constantes de la solution particulière et d'intégrer la vitesse limite comme demandé dans la question.

Le lecteur trouvera l'énoncé et la correction en annexe. Notons que l'on s'autorise dans l'énoncé et la correction à indiquer v au lieu de $v(t)$ pour la vitesse, de même pour l'accélération, sachant que c'est implicite compte tenu que l'expression dépend du temps t.

5. Analyses avec la TAD et la TA

Nous avons choisi de cibler trois questions particulières du problème concerné, qui nous semblent propices aux réflexions sur les mathématiques qui apparaissent dans ce problème de physique. Notons que pour les analyses en TAD, nous préciserons seulement trois éléments : les types de tâches, les techniques et les technologies. Nous considérons que la théorie en arrière plan est pour tout ce problème la mécanique newtonienne. Ces analyses sont fondées sur le corrigé donné en annexe.

5.A Question a)

La question a) du problème est formulée comme suit :

a) Exprimer, en fonction de l'intensité de la pesanteur terrestre g, du rayon r de la bille et des masses volumiques μ et μ_0, le poids P et la poussée d'Archimède Π exercée par le liquide sur la bille.

Analyses en TAD

Le type de tâches peut être décrit comme « Exprimer une grandeur physique en fonction d'autres grandeurs physiques données, en utilisant des relations connues », on le notera T_{gp}.

La technique associée τ_{gp} consiste à trouver des relations connues qui vont permettre de relier la grandeur physique à exprimer aux grandeurs physiques données, et à établir les formules voulues.

Plus précisément, ici dans un premier temps on cherche à exprimer P. La formule à appliquer est « $P = mg$ ». Pour appliquer cette formule, il faut déterminer la masse m : cette tâche relève aussi du type tâche T_{gp}, et constitue ici un ingrédient de technique pour τ_{gp}. La technique pour déterminer m consiste à utiliser la formule $m = \mu V$, où V désigne le volume de la bille. Il faut donc déterminer le volume de la bille, ce qui constitue une nouvelle tâche de type T_{gp}. La technique pour déterminer V consiste à appliquer la formule du volume d'une sphère : $V = \left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$.

Dans un deuxième temps il s'agit de déterminer la poussée d'Archimède Π (tâche de type T_{gp}). La technique est semblable à celle utilisée dans le cas de P, en appliquant cette fois la formule $\Pi = m_f g$, où m_f désigne la masse de liquide déplacée par la bille. Pour appliquer cette formule, il faut donc déterminer m_f, ce qui se fait en utilisant le volume V de la bille calculé auparavant et la masse volumique μ_0 du liquide.

Ici les éléments technologiques sont :

- les formules $P = mg$ et $m = \mu V$, apprises dans le cours de physique au lycée ;
- la formule du volume d'une boule $V = \left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$, formule apprise au collège ;
- le théorème de physique « la poussée d'Archimède exercée par un liquide sur un corps immergé est égale au poids du liquide déplacé » qui justifie la formule $\Pi = m_f g$.

De manière plus générale, la technologie incorpore des éléments liés à la modélisation en physique, comme la possibilité de passer d'une situation physique à un ensemble d'équations modélisant cette situation, ou la vérification de l'homogénéité des formules. Concernant ce dernier aspect, il relève du type de tâches "vérifier l'homogénéité des formules" qui est ici implicite pour les élèves. La technique associée consiste à calculer les deux membres de la formule avec une valeur numérique de 1 pour chaque grandeur en jeu et vérifier l'égalité des deux membres. La technologie est notamment fondée sur la connaissance des unités associées à chaque grandeur.

Analyses en TA

L'analyse en termes de TA suppose connus des éléments de contexte de l'activité ainsi que sur les connaissances supposées disponibles des étudiants qui doivent réaliser la tâche. L'exercice est classique et des exercices de la sorte ont déjà été rencontrés par les étudiants en TD. Il y a deux tâches clairement identifiées dans l'énoncé (deux calculs). Les connaissances qui doivent être mises en fonctionnement sont, d'une part, les formules du lycée $P = mg$, $m = \mu V$, $\Pi = m_f g$, $m_f = \mu_0 V$ (en reprenant les notations précédentes) et, d'autre part, la formule du volume $V = \left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$ qui est plus ancienne et n'a pas le même statut. Les quatre premières formules doivent être mobilisables car elles sont enjeu de l'apprentissage, elles sont usuelles dans ce style d'exercice de physique et elles sont appelées par l'énoncé, directement, ou indirectement par la donnée de μ et μ_0. La formule $V = \left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$ peut être considérée comme mise en fonctionnement au niveau disponible (c'est un choix subjectif du chercheur). En effet, elle est plus ancienne, elle fonctionne comme outil pour calculer m, elle relève exclusivement d'un contexte de géométrie euclidienne élémentaire (cours de mathématiques) et enfin elle n'est pas enjeu de l'apprentissage en L1 en physique. Elle est en outre très contextualisée à cet exercice particulier. Par ailleurs, l'énoncé parle de « bille » et l'association entre bille et formule du volume d'une sphère n'est pas forcément immédiate pour des étudiants, ce qui peut bloquer la disponibilité. La donnée du rayon « r » constitue cependant un indice qui favorise au contraire cette disponibilité et peut justifier un étiquetage « mobilisable ». Une connaissance plus précise du contexte (un entretien avec l'enseignant par exemple) permettrait de mieux trancher.

Des connaissances de l'ordre des savoir-faire de modélisation doivent également être mises en fonctionnement dans cette question. Les étudiants doivent se représenter la situation physique (éventuellement prendre l'initiative de faire un schéma, ce qui n'est pas explicitement demandé). On peut penser que ces modélisations ont déjà été rencontrées dans les exercices de ce style, voire routinisées, pendant les cours de physique. Les étudiants doivent cependant d'eux-mêmes associer la bille à une sphère.

Enfin on peut pointer des adaptations de connaissances liées à l'enchevêtrement des formules à utiliser. Pour la première tâche (calcul de l'intensité de la pesanteur), les étudiants doivent organiser par eux-mêmes une sous-tâche de calcul de la masse m. Dans les exercices rencontrés en TD, le volume de l'objet déplacé, voire sa masse, pouvaient avoir été donnés d'emblée dans l'énoncé, ce qui n'est pas le cas ici. On aurait pu aussi, dans un autre énoncé, proposer une question préliminaire pour le calcul de m. Il y a donc bien la reconnaissance et l'organisation d'une sous-tâche à la charge des étudiants, ce qui peut constituer une source de difficulté. L'exécution même de cette sous tâche appelle elle-même la mise en fonctionnement de $m = \mu V$ et le calcul de V que l'on peut associer à une deuxième couche de sous-tâche.

Cet enchevêtrement se rajoute aux adaptations liées à la reconnaissance de la sphère et de la formule de son volume. Cette double complexité en quelque sorte (enchevêtrement et reconnaissance de la sphère) peut expliquer les difficultés attendues chez les étudiants. L'analyse didactique de la complexité de la deuxième tâche (calcul de la poussée d'Archimède) est similaire. Il y a un changement de point de vue sur V (volume de la bille / volume d'eau déplacé) mais ce changement de point de vue a nécessairement été routinisé dans les exercices déjà rencontrés en TD.

De manière semblable à ce que nous avons évoqué ci-dessus dans notre analyse en termes de TAD, on peut associer ici à la vérification de l'homogénéité des formules trouvées une activité de contrôle qui est à la charge des étudiants. Cette activité n'est pas nécessaire, elle n'est pas appelée explicitement par une sous tâche. Elle n'est souvent développée que par les bons étudiants qui reconnaissent cette occasion de contrôle.

5.B Question b)

La question b) du problème consiste à établir l'équation différentielle du mouvement de la bille ; on vérifie en fin de question l'homogénéité de l'équation obtenue (voir le texte complet de la question en annexe).

Analyses avec la TAD

Ici les étudiants rencontrent deux types de tâches différents : « Établir l'équation différentielle qui modélise un mouvement » (noté $\mathrm{T_{edm}}$) puis « Vérifier l'homogénéité d'une équation » (noté $\mathrm{T_{he}}$).

Pour $\mathrm{T_{edm}}$, la technique consiste à faire le bilan des forces s'exerçant sur le mobile, ici sur la bille (ce qui constitue un nouveau type de tâches, $\mathrm{T_{bf}}$). Ici trois forces s'exercent sur la bille : $\vec{P}$, $\vec{\Pi}$, ainsi que la force de frottements $\vec{F}$ dont l'expression en fonction de la vitesse de la bille est donnée dans l'énoncé. Les vecteurs correspondants ont tous la même direction, et on a déterminé en question a) les normes ('intensités') de $\vec{P}$ et $\vec{\Pi}$. On introduit donc un repère avec un unique vecteur unitaire $\vec{\jmath}$ pour s'affranchir ensuite des vecteurs dans la seconde loi de Newton (projections de vecteurs). On note que le corrigé proposé aux étudiants comporte un schéma, dans lequel les forces et le vecteur $\vec{\jmath}$ sont représentés verticalement, le vecteur $\vec{\jmath}$ étant orienté vers le bas. Cette représentation graphique peut constituer une aide pour les étudiants, facilitant leur projection de vecteur. Celle-ci n'est pas demandée, sa réalisation relève de l'initiative des étudiants.

On applique alors la formule de la deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F} = m\vec{a} = m\left(\frac{dv}{dt}\right)\vec{\jmath}$ avec $\vec{a}$ le vecteur accélération. Ensuite chaque force est remplacée par son expression, et on supprime le vecteur unitaire $\vec{\jmath}$ de l'équation pour obtenir une équation différentielle en v. On reconnaît qu'on peut écrire cette équation sous la forme $\left(\frac{dv}{dt}\right) + \left(\frac{v}{\tau}\right) = C$ avec les constantes τ et C qui ont été définies dans l'énoncé.

Dans la technologie correspondante, la deuxième loi de Newton (la somme des forces est égale à la masse fois l'accélération) joue un rôle essentiel. On utilise également le concept de bilan de forces ; le fait que la vitesse est une fonction du temps, et que l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps. La relation de Stokes pour la force de frottement fluide est donnée dans l'énoncé.

Pour $\mathrm{T_{he}}$, la technique consiste à exprimer les dimensions des différents termes de l'équation différentielle pour vérifier si l'équation est homogène. On cherche quelles sont les dimensions fondamentales présentes dans l'équation. Ici, une vitesse est une distance divisée par une durée, donc en $\mathrm{L.T^{-1}}$, une accélération est donc en $\mathrm{L.T^{-2}}$. L'énoncé donne g aussi dont la dimension est en $\mathrm{L.T^{-2}}$, et dit que τ est la constante de temps du système, donc τ est une grandeur de dimension T.

La technologie associée à cette technique comporte la définition de l'homogénéité d'une formule en physique (les dimensions sont les mêmes de part et d'autre de l'équation), la nature des différentes grandeurs dans la formule, ainsi que les dimensions fondamentales. Celles qui interviennent ici sont simplement L $(longueur)$ et T $(temps)$.

Analyses en TA

Cette question se divise à nouveau en deux tâches clairement identifiées. A nouveau, comme des exercices de ce style ont déjà été rencontrés par les étudiants en TD, les connaissances de mécanique Newtonienne sont à mettre en fonctionnement au niveau mobilisable (deuxième loi de Newton, relation de Stockes, lien entre vitesse et accélération). Les dimensions des grandeurs physiques (vitesse, accélération notamment) et la contrainte d'homogénéité dans les équations sont aussi des connaissances qui sont attendues au niveau mobilisable.

Les étudiants doivent appliquer la deuxième loi de Newton ce qui est globalement routinisé dans ce contexte. La force de frottement est une donnée de l'énoncé. Selon la familiarité des étudiants avec ce genre de modélisation, l'application de la loi comporte plus ou moins d'adaptations des connaissances : le passage au cadre vectoriel, à la charge des étudiants, est sans doute plus ou moins routinisé, avec l'introduction d'un vecteur unitaire vertical $\vec{j}$ orienté vers le haut ou vers le bas (au choix s'il n'y a pas de routine dans ces situations). Les trois vecteurs ont même direction que $\vec{j}$ mais avec des sens différents. Les sens de $\vec{P}$ vers le bas et $\vec{\Pi}$ vers le haut sont immédiats (routine). Le sens de $\vec{F}$ est donné relativement au sens de $\vec{v}$ en interprétant la formule $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$. Comme le sens du mouvement est vers le bas (chute de la bille) et qu'il y a un signe négatif, cela implique que $\vec{F}$ soit orientée vers le haut. Les étudiants doivent donc adapter leurs connaissances de physique sur le sens de $\vec{v}$ dans une situation de chute et analyser la formule de $\vec{F}$ pour en déduire que $\vec{F}$ est dans le sens inverse du mouvement de chute. L'entrée dans l'exécution de cette tâche peut donc s'avérer difficile pour les étudiants car même si la deuxième loi de Newton est mobilisable par les étudiants, son application n'est pas du tout immédiate.

À partir de là les calculs algébriques découlent, avec réinvestissement à reconnaître des résultats de la question précédente. Il y a un retour routinisé au cadre algébrique en projetant la relation vectorielle sur $(O, \vec{j})$ mais la présence des nombreux paramètres g, μ, μ_0, r, η vient complexifier les calculs dans cet exercice, notamment pour des étudiants de L1 qui ont des difficultés en calcul algébrique. Il y a des développements/factorisations et une possibilité de contrôle du résultat final en utilisant les expressions littérales de τ et C données dans l'énoncé. Les étudiants doivent reconnaître comme dans la question précédente la possibilité de ce contrôle, ce qui n'est pas garanti. Dans ces calculs, la relation prend aussi une dimension dynamique avec l'introduction explicite de la variable de temps. Tous les étudiants peuvent ne pas en prendre conscience non plus. Certains peuvent aussi piloter leur calcul afin d'aller vers la forme linéaire d'une équation différentielle, ce qui suppose de comprendre la logique interne de la situation qui se modélise nécessairement par une équation linéaire. Il y a ainsi a priori de nombreux points de complexité dans cette première tâche pour établir l'équation différentielle. Même si une telle question est routinisée avec ce genre d'exercices, la contextualisation à cet énoncé précis apporte plusieurs adaptations à la charge des étudiants et des activités qui ne sont pas nécessairement accessibles à tous les étudiants, comme l'évolution du statut des formules (vectorielle/algébrique), le caractère dynamique de la relation différentielle finale et le pilotage/reconnaissance de la forme d'équation différentielle linéaire.

La deuxième tâche porte sur la mobilisation des dimensions fondamentales des grandeurs physiques en jeu dans les deux membres de l'équation (accélération, gravité, vitesse). Cette mobilisation est routinisée et ce sont des connaissances anciennes. Mais les étudiants doivent également reconnaître des informations pertinentes données dans l'énoncé : l'identification du fait que τ est une constante de temps donc une durée et du fait que C est une constante qui est de même dimension que g constitue la difficulté majeure pour répondre à cette question. Avec ces connaissances et reconnaissances, la vérification demandée est ensuite immédiate.

5.C Question g)

La question g) du problème est la suivante.

Montrer que l'équation différentielle a pour solution analytique : $v = A\ exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + B$. Déterminer les valeurs littérales puis numériques des constantes A et B. Exprimer la solution en fonction de la vitesse limite de chute vL.

Analyses avec la TAD

Quatre types de tâches apparaissent dans la résolution de cette question. Ces types de tâches peuvent être présentés comme « Vérifier qu'une famille de fonctions donnée vérifie une équation différentielle donnée » (T_{ved}) ; « Déterminer parmi les solutions d'une équation différentielle celle qui vérifie une condition donnée par le système physique » (T_{sc}) ; « Déterminer les valeurs numériques entrant en jeu dans l'expression d'une fonction en fonction de conditions physiques » (T_{nf}) et « Transformer l'expression d'une grandeur physique donnée par une fonction pour l'exprimer en fonction de grandeurs physiques particulières » (T_{gp}). La technique pour T_{ved} relève du calcul différentiel, il s'agit d'une simple vérification. Pour T_{sc}, les étudiants doivent utiliser le calcul algébrique, mais également les conditions initiales du système étudié. La phrase « la bille est lâchée sans vitesse initiale » leur permet d'affirmer que $v(0) = 0$ (technologie).

On note qu'il n'est pas demandé d'interprétation finale, alors même que la notion de « vitesse limite de chute » a un sens physique très important dans ce problème. Le repérage de « Types de tâches manquants » est un des apports possibles de la TAD.

Analyses avec la TA

Pour la première tâche, on retrouve une complexité essentiellement liée à la présence des nombreux paramètres qui rendent difficiles les calculs algébriques. Les étudiants ont cependant une possibilité de contrôle puisqu'il s'agit de vérifier que la solution proposée vérifie l'équation et non de la résoudre intégralement. La tâche est donc plus simple que la tâche classique de résolution qui serait proposée dans le contexte mathématique. Les étudiants doivent ici essentiellement mettre en fonctionnement des connaissances anciennes, qui doivent être mobilisables, sur la dérivation de fonctions composées avec l'exponentielle, avec la complexité liée aux paramètres. Cependant, sans condition sur B, la solution proposée n'en est pas une. Les étudiants doivent reconnaître qu'il y a d'abord une condition nécessaire B = C τ et aussi le fait que c'est la constante A qui dépend des conditions initiales. Pour utiliser la condition initiale, il faut identifier dans l'énoncé le fait que la vitesse initiale est nulle, donc que $v(0) = 0$. On en déduit que $A = -\,C\tau$ par des calculs simples à ce niveau L1. Sans toutes ces reconnaissances attendues, les étudiants peuvent ne pas parvenir à répondre à cette question alors que les calculs en eux-mêmes sont simples. Enfin, pour exprimer la solution en fonction de la vitesse limite de chute, il faut reconnaître la nécessité du calcul de $v(t)$ lorsque t tend vers l'infini pour obtenir dans un premier temps la valeur vL puis dans un second temps exprimer $v(t)$ en fonction de vL. Il y a donc une étape implicite : la détermination explicite de vL qui peut complexifier à nouveau cette dernière question et la rendre difficile pour les étudiants.

5.D Quelques commentaires sur les apports de la TAD et de la TA

Pour une tâche donnée, la TAD va chercher à la rattacher à un type de tâches, puis déterminer la praxéologie correspondant à ce type de tâches dans l'institution concernée. Le fait d'identifier les praxéologies qui sont étudiées dans une institution donnée, par exemple dans un cours de physique en L1, permet une compréhension fine du curriculum de cette institution. Quels sont les types de tâches rencontrés par les étudiants ? Est-ce que le cours leur présente seulement des techniques pour accomplir ces types de tâches, est-ce qu’il fournit également un discours technologique justifiant ces techniques ? Ces questions relèvent d’une analyse du curriculum. On peut également se poser avec la TAD des questions sur ce qui est attendu des étudiants, par exemple : est-ce que l’énoncé des exercices évoque les techniques à utiliser, demande une justification et donc un discours technologique ? On approche ainsi la question de la complexité des énoncés. Toutefois cette complexité est analysée de manière plus complète avec la TA. En effet il s’agit en TA de prendre en compte non pas le point de vue de l’institution et de ses attentes, mais celui de l’étudiant et de son environnement. En particulier les reconnaissances sont cruciales en TA, notamment les reconnaissances par les étudiants du fait qu’une tâche relève de tel ou tel type de tâche. La difficulté d’une technique dépend beaucoup de son caractère routinisé ou non et des adaptations à mettre en acte, à partir des connaissances disponibles, même anciennes. Ainsi dans cet exercice, l'analyse de la TA révèle que les étudiants doivent introduire et organiser des étapes pour démêler et se sortir de l'enchevêtrement des formules, ce qui rend difficile leurs utilisations alors même que chaque formule est connue. Il faut aussi reconnaître les variables, qui ont des noms inhabituels (par rapport aux mathématiques), et, de même, identifier les paramètres, nombreux, à intégrer dans les calculs et penser à assimiler une bille à une sphère (changement de point de vue). Dans la dernière question, il faut introduire un intermédiaire, non indiqué, pour établir la valeur d'un paramètre (un calcul de limite). L'analyse permet ainsi d'interpréter les difficultés ou les erreurs des étudiants, voire de les anticiper et surtout de les expliquer aux étudiants, en relation avec les mises en fonctionnement attendues sur des tâches même bien identifiées.

6. Discussion sur les analyses

6.A Appliquer à la physique des théories de didactique des mathématiques

Nous considérons en premier lieu la question de l’emploi de la TAD et de la TA, théories de didactique des mathématiques, pour l’analyse d’un énoncé de physique. Le travail d’analyse a été complexe pour nous, comme pour les participants de l’atelier. Dans l’atelier se trouvaient quelques didacticiens de la physique non spécialistes de ces théories, des didacticiens des mathématiques non spécialistes de physique, ainsi que des collègues découvrant la didactique. La collaboration de l’ensemble des participants a donc été nécessaire aux analyses. Identifier le type de tâches dont relève une tâche de physique donnée est délicat, pour quelqu’un qui n’enseigne pas la physique. Chaque exercice est relié à un tout structuré de manière implicite. Mener une analyse en termes de TAD permet d’expliciter cette structure ; cependant une certaine connaissance préalable du curriculum est nécessaire à ces analyses. Un autre point a été soulevé lors des échanges durant l’atelier : il est toujours possible en TAD de considérer pour une même tâche des types de tâches plus ou moins généraux. Le choix de ce degré de généralité conditionne l’analyse menée ensuite. Par exemple, pour la question a) nous avons retenu ci-dessus : « Exprimer une grandeur physique en fonction d’autres grandeurs physiques données, en utilisant des relations connues ». Nous aurions pu nous centrer sur les types de tâches plus précis « Exprimer le poids d’un objet » et « Exprimer la poussée d’Archimède qui s’exerce sur un objet plongé dans un liquide ». Nous avons choisi d’associer ces deux types de tâches dans un type plus général car les techniques associées sont semblables. Le choix du niveau de généralité approprié pour la description des types de tâches dépend de l'objectif poursuivi.

De la même façon qu'il y a une difficulté en TAD à identifier de quel type de tâches relève une tâche donnée et notamment le choix du degré de généralité du type de tâches à considérer, il y a une difficulté en TA pour savoir quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances pour résoudre une tâche. Dans ces analyses en effet, il est important d'avoir des informations sur le contexte d'exécution des tâches. Des tâches qui ont été routinisées par les étudiants appellent des connaissances très techniques alors que des tâches qui ont des aspects de nouveauté nécessitent des reconnaissances, de l'organisation et des adaptations de connaissances. Dans nos analyses, nous avons fait des choix sur les connaissances supposées disponibles des étudiants et notamment sur ce qui avait pu être routinisé pendant leurs séances de TD. Par exemple, les connaissances de physique engageant des formules classiques $P = mg$, $m = \mu V$, $\Pi = m_f g$, $m_f = \mu_0 V$ ont été supposées directement applicables car elles sont enjeu d'enseignement et d'apprentissage dans les exercices classiques de TD à ce niveau. La formule du volume de la sphère peut nécessiter par contre une disponibilité plus forte si les étudiants n'ont pas traité un exercice mettant en jeu une bille ou une sphère. Elle est certes plus ancienne mais relève du domaine des mathématiques et pas de la physique. C'est d'ailleurs discuté dans nos analyses de la question a).

D'autres échanges ont mis en avant la difficulté de reconnaître ce qui relève d'une technique ou d'un type de tâches. Toujours en revenant à l'exemple de la question a), on peut ainsi notamment voir le calcul du volume de la bille comme relevant d'un type de tâches : « calculer un volume ». Mais dans le contexte étudié, il s'agit d'un aspect de la technique visant à déterminer le poids. Cette ambiguïté est levée par le concept 'd'ingrédient de technique' : une fois fixé le type de tâches auquel on s'intéresse, ceux qui apparaissent au cours de technique sont vus comme des ingrédients de cette technique.

Ainsi, même si nous notons la complexité du travail d'analyse proposé, nous retenons aussi que les échanges entre les différents types de participants de l'atelier étaient très riches ; ils ont révélé des points délicats dans l'application de ces théories qui n'auraient probablement pas été visibles pour des spécialistes de physique, de TAD et de TA.

6.B Les spécificités des mathématiques utilisées en physique

Au fil des analyses menées dans l'atelier, nous avons noté de nombreuses différences entre les mathématiques utilisées dans la résolution de ce problème de physique et les mathématiques d'un cours de mathématiques. Nous ne tentons pas ici d'en faire une liste exhaustive ; nous donnons des exemples concernant différents types de d'écarts.

Certains écarts concernent les notations. Ainsi les forces sont des vecteurs ; dans la question a), il s'agit de déterminer leur norme. Mais cette norme n'est pas notée avec une double barre comme en mathématiques, on utilise la même lettre que pour le vecteur, sans la flèche. Autre écart de notation, la vitesse qui est une fonction du temps est notée v, et non $v(t)$.

Cette notation pour la vitesse est liée à un autre type d'écart : la connaissance du contexte physique joue un grand rôle dans l'exercice. On sait que la vitesse est une fonction du temps, on peut donc se passer de le rappeler. De même on sait que les différents vecteurs qui interviennent ont la même direction ; donc on peut introduire un repère $(O, \vec{\jmath})$ avec un seul vecteur, sans expliquer ni justifier ce choix. Ces connaissances implicites sont nécessairement en jeu dans des analyses de tâches de physique.

On relève également un écart lié au vocabulaire utilisé : ici lorsqu'on demande en question b) aux étudiants de « Vérifier l'homogénéité de l'équation différentielle », il s'agit d'homogénéité au sens des grandeurs physiques, et non d'une équation différentielle homogène au sens des mathématiques.

Finalement, un écart essentiel concerne la résolution de l'équation différentielle. Ici on ne demande pas aux étudiants de résoudre cette équation, la question posée est « Montrer que l'équation différentielle établie à la question a) a pour solution analytique $v = Aexp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + B.$ ». Il s'agit donc en fait de vérifier que, en choisissant la bonne valeur pour B, les fonctions de la famille donnée dans l'énoncé sont solutions. En mathématiques, on dirait probablement « vérifier que pour une valeur de B bien choisie la fonction $v = Aexp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + B$ est solution de l'équation », et on ne considèrerait pas que cette vérification permet de s'assurer qu'on a trouvé toutes les solutions de l'équation.

Le travail d'analyse de cet énoncé de physique mené par un collectif associant de nombreux mathématiciens et quelques physiciens a permis de mettre en exergue les implicites et les difficultés que les étudiants peuvent avoir en traitant ce type d'énoncé de physique. Suivant la manière dont est posé l'énoncé, la tâche proposée aux étudiants peut s'avérer très complexe. La nécessité d'adapter les notions mathématiques vues dans un cours de mathématiques dans un contexte de résolution d'exercice de physique peut être compliquée pour les étudiants et induire des malentendus entre ce que les étudiants sont capables de faire et ce que l'enseignant attend des étudiants. En effet, les mathématiques sont réinvesties différemment pour résoudre un problème de physique avec souvent bien plus d'implicite que dans un énoncé en mathématiques, des notations différentes, des objets identiques mais vus différemment, des méthodes différentes pour résoudre un même type de tâche, etc. Toutes les difficultés mathématiques que pourraient avoir les étudiants dans la résolution d'un exercice de physique ne sont pas forcément prises en compte dans la manière de rédiger un énoncé de physique et dans ce qui est demandé aux étudiants.

Lors de l'atelier, le travail d'analyse d'un énoncé d'exercice de physique à partir de deux théories issues de la didactique des mathématiques s'est avéré très intéressant. Nous avons tenté d'en rendre compte dans ce texte. Qu'il s'agisse de la recherche en didactique, ou de la conception de supports pertinents pour nos étudiants, nous retenons en tout cas l'apport essentiel d'un travail mené en commun entre spécialistes des mathématiques et de la physique ou de toute autre discipline utilisatrice de mathématiques. Les résultats des travaux présentés ici pourraient être un point de départ pour la construction d'ateliers avec un public mixte et équilibré entre des collègues spécialistes en mathématiques et ceux experts d'une autre discipline utilisatrice de mathématiques. Les échanges dans de tels ateliers, outillés par des théories, méthodes d'analyse et résultats de la didactique, permettraient de mettre au jour des implicites de chaque discipline, voire des éléments manquants dans l'enseignement. De tels ateliers pourraient contribuer à la formation des enseignants de l'université, et donc à la réussite des étudiants de ces filières.

Annexe : L'énoncé et son corrigé

Chute d'une bille dans un liquide

Une bille en verre (masse volumique μ, rayon r) est lâchée, sans vitesse initiale dans un tube vertical contenant de l'huile de ricin (masse volumique μ_o).

On donne : $r = 1$ mm ; $\mu = 2600$ kg / m³ ; $\mu_o = 970$ kg / m³ ; $g = 9{,}81$ m.s⁻².
a) Exprimer, en fonction de l'intensité de la pesanteur terrestre g, du rayon r de la bille et des masses volumiques μ et μ_o, le poids P et la poussée d'Archimède Π exercée par le liquide sur la bille.

Exprimons, en fonction de l'intensité de la pesanteur terrestre g, du rayon r de la bille et des masses volumiques μ et μ_o, le poids P et la poussée d'Archimède Π.

Son poids s'exprime sous la forme $P = mg$.

La masse de la bille est $m = V\mu$ avec le volume de la bille : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Donc $P = \frac{4}{3}\pi r^3 \mu g$

La poussée d'Archimède Π exercée par le liquide sur la bille est égale au poids du liquide déplacé par la bille : $\Pi = V\ \mu_O g$. D'où : $\Pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \mu_O g$

b) Établir l'équation différentielle du mouvement de la bille sachant que, dans le domaine de vitesse étudié, la force de frottement fluide peut s'écrire sous la forme : $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$ (relation de Stokes, valable lorsque la vitesse reste faible)
η est le coefficient de viscosité du liquide
$\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la bille en translation rectiligne
r est le rayon de la bille
On pose : $\tau = \frac{2\mu r^2}{9\eta}$ la constante de temps du système et $C = \left(1 - \frac{\mu_O}{\mu}\right) g$ une constante.
Vérifier l'homogénéité de l'équation différentielle.

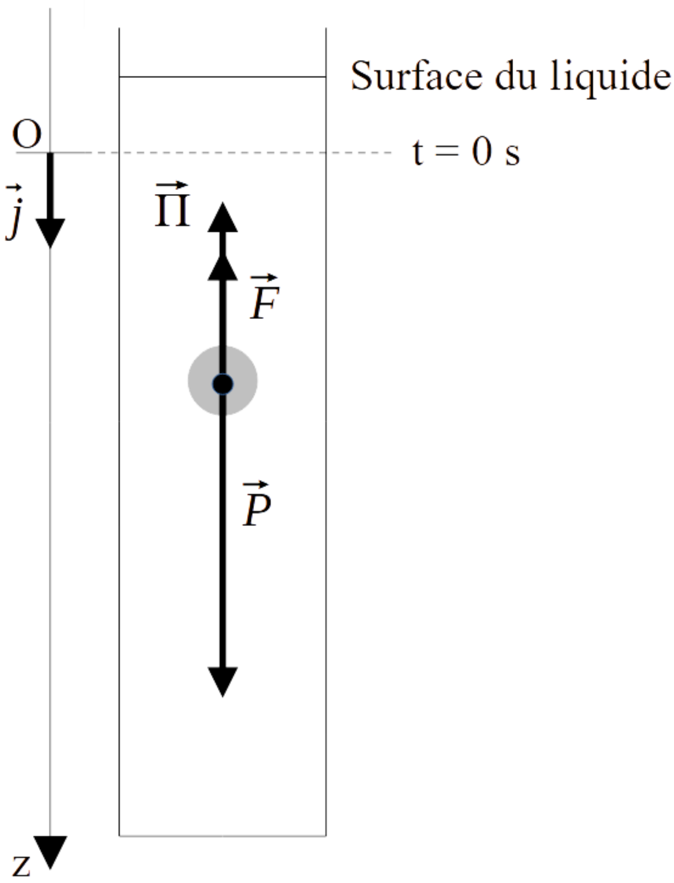
Établissons l'équation différentielle du mouvement de la bille sachant que, dans le domaine de vitesse étudié, la force de frottement fluide peut s'écrire sous la forme : $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$ (relation de Stokes, valable lorsque la vitesse reste faible)

Système étudié : la bille

Référentiel : terrestre galiléen. On lui associe le repère d'étude $(O, \vec{j})$.

Forces extérieures s'exerçant sur la bille (voir schéma ci-dessous) :

- Le poids $\vec{P}$, essentiellement dû à l'action gravitationnelle de la Terre sur la bille
- La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ exercée par le liquide sur la bille
- La force de frottement fluide $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v} = -6\pi\eta r v\vec{j}$



Appliquons la deuxième loi de Newton :
Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse m du solide par l'accélération $\overrightarrow{a_G}$ de son centre d'inertie :

$$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\ldots=m\overrightarrow{a_G}$$

Ici, ce théorème s'écrit : $\vec{P}+\vec{\Pi}+\vec{f}=m\vec{a}$
Utilisons les expressions :

* $\vec{P}=\frac{4}{3}\pi r^3 \mu g\vec{j}$
* $\vec{\Pi}=\frac{-4}{3}\pi r^3 \mu_O g\vec{j}$ $(g>0)$
* $\vec{F}=-6\pi\eta r v\vec{j}$ (v varie mais reste > 0)

Il vient, avec $\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{j}$: $\frac{4}{3}\pi r^3 \mu g\vec{j}-\frac{4}{3}\pi r^3\mu_O g\vec{j}-6\pi\eta r v\vec{j}=m\frac{dv}{dt}\vec{j}$
Soit : $\frac{4}{3}\pi r^3(\mu-\mu_O)g-6\pi\eta r v=m\frac{dv}{dt}$
Introduisons la masse volumique de la bille. On a : $m=V\mu=\frac{4}{3}\pi r^3\mu$

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\mu-\mu_O)g-6\pi\eta r v=\frac{4}{3}\pi r^3\mu\frac{dv}{dt}$$

$$(\mu-\mu_O)\frac{g}{\mu}-\frac{9}{2}\frac{\eta}{\mu r^2}v=\frac{dv}{dt}$$

Soit, en plaçant le terme constant dans le second membre : $\frac{dv}{dt}+\frac{9}{2}\frac{\eta}{\mu r^2}v=\left(1-\frac{\mu_O}{\mu}\right)g$
Finalement : $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=C$ avec $\tau=\frac{2\mu r^2}{9\eta}$ et $C=\left(1-\frac{\mu_O}{\mu}\right)g$

Homogénéité de l'équation différentielle :
[dv/dt] = [v] / [t] = $L.T^{-2}$; [v] = $L.T^{-1}$; [τ] = T
Donc [v] / [τ] = $L.T^{-1}.T^{-1} = M.L.T^{-2}$.
[C] = [g] = [v] / [t] = $L.T^{-1}.T^{-1} = L.T^{-2}$.
L'équation est donc homogène.

c) Déterminer, en fonction g, μ et μ_o, l'accélération initiale de la bille. Calculer sa valeur numérique.

Déterminons, en fonction g, μ et μ_o, l'accélération initiale de la bille.
A l'instant du départ t = 0 s, l'énoncé dit que la vitesse est nulle.
Portons dans l'équation différentielle : $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=C$
On obtient : $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0+\frac{v_0}{\tau}=C$ avec $v_0 = \ 0\,m.s^{-1}$. Donc : $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0=C=\left(1-\frac{\mu_O}{\mu}\right)g$
Numériquement on a : $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0=\left(1-\frac{970}{2600}\right)\times 9{,}81=(1-0{,}37)\times 9{,}81=0{,}63\times 9{,}81=6{,}18\,m.s^{-2}$

d) Déterminer, en fonction g, μ, μ_o, r et η, la vitesse limite de la bille.

Initialement nulle, la force de frottement $\vec{f}$ augmente proportionnellement à la vitesse. Le moment vient où le poids $\vec{P}$ est compensé par la somme des deux forces résistantes $\vec{\Pi}+\vec{f_L}$ où $\vec{f_L}$ est la force de frottement limite pour laquelle la vitesse de la bille est constante et par conséquent l'accélération est nulle. La somme des forces est alors nulle et, d'après la deuxième loi de Newton : $\vec{P}+\vec{\Pi}+\vec{f_L}=m\vec{a_L}$ avec $\vec{a_L}=\vec{0}$
La relation $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=C$ devient $\left(\frac{dv}{dt}\right)_L+\frac{v_L}{\tau}=C$ avec $\left(\frac{dv}{dt}\right)_L=0$ $m.s^{-2}$.

Finalement : $v_L=C\tau=\left(1-\frac{\mu_O}{\mu}\right)g\frac{2\mu r^2}{9\eta}=\frac{2gr^2(\mu-\mu_0)}{9\eta}$

e) Calculer numériquement le coefficient de viscosité η de l'huile de ricin sachant que la vitesse limite de la bille est v_L = 0,71 $mm.s^{-1}$.

La relation $v_L=\frac{2gr^2(\mu-\mu_0)}{9\eta}$ peut aussi s'écrire : $\eta=\frac{2gr^2(\mu-\mu_0)}{9v_L}$
Numériquement :$\eta=\frac{2\times 9{,}81\times 10^{-6}\times(2600-970)}{9\times 0{,}71.10^{-3}}=\frac{19{,}62\times 10^{-6}\times 1630}{6{,}39.10^{-3}}=5005.10^{-3}=5{,}005\ SI\ ou\ Pa.s$

f) Déterminer les unités de τ et C. Calculer leur valeur numérique.

D'après b) : $[C]=\mathrm{L.T}^{-2}$ et $[\tau]=\mathrm{T}$. L'unité de C est donc $m.s^{-2}$. L'unité de τ est donc s (seconde).
Calcul des valeurs numériques de C et τ :
$C=\left(1-\frac{\mu_O}{\mu}\right)g=6{,}18\,m.s^{-2}$ (voir question c)

$$\tau=\frac{2\mu r^2}{9\eta}=\frac{2\times 2600\times 10^{-6}}{9\times 5{,}005}=\frac{5{,}2.10^3\times 10^{-6}}{4{,}5.10^2}=115{,}44.10^{-5}=1{,}15.10^{-4}\ s$$

g) Montrer que l'équation différentielle établie à la question a) a pour solution analytique :$v=Aexp\left(\frac{-t}{\tau}\right)+B$. Déterminer les valeurs littérales puis numériques des constantes A et B. Exprimer la solution en fonction de la vitesse limite de chute v_L.

Vérifions que la solution analytique de l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$ est de la forme :$v = Aexp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + B$. Pour cela, calculons la dérivée, par rapport au temps t, de $v = Aexp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + B$:$\frac{dv}{dt} = \frac{-A}{\tau}exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$.

Portons $\frac{dv}{dt} = \frac{-A}{\tau}exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ et $v = Aexp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + B$ dans : $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$.

On obtient : $\frac{-A}{\tau}exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + \frac{Aexp\left(\frac{-t}{\tau}\right)+B}{\tau} = C$. Soit : $\frac{B}{\tau} = C$

La fonction $v = Aexp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + B$ est bien solution de $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$ si $B = C\tau$

La fonction $v = Aexp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + C\tau$ est solution analytique de $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$

La valeur de la constante A dépend des conditions initiales. Ici, pour t = 0 s on doit avoir $v_0 = 0$ m.s[1].

Portons dans $v = Aexp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + C\tau$: $v_0 = 0 = A\, exp\left(\frac{-0}{\tau}\right) + C\tau$ avec $exp\left(\frac{-0}{\tau}\right) = 1$

Donc : $A + C\tau = 1$. D'où : $A = -C\tau$

Finalement la solution analytique s'écrit : $v = -C\tau exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + C\tau$

Finalement : $v = C\tau\left(1 - exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$

Déterminons les valeurs numériques des constantes A et B. On a vu que : $A = -C\tau$ et $B = C\tau$. A la question c), nous avons vu que : $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 = C = 6{,}18\ m.s^{-2}$. A la question f), nous avons vu que :$\tau = 1{,}15.10^{-4}\ s$.

Donc : $A = -B = -C\tau = -6{,}18 \times 1{,}15.10^{-4} = 7{,}11.10^{-4}\ m.s^{-1}$

En tenant compte des conditions initiales (vitesse nulle lorsque t = 0 s) la solution analytique de $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$ est : $v = C\tau\left(1 - exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$. Soit, en exprimant numériquement les constantes C et τ :$v = 7{,}11.10^{-4}\left(1 - exp\left(\frac{-t}{1{,}15.10^{-4}}\right)\right)$

Dans la question d), nous avons vu que $vL = C\,\tau$. Par conséquent la solution de l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$ s'écrit en fonction de la vitesse limite : $v = v_L\left(1 - exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$. Quand t tend vers 0 la vitesse est bien nulle. Quand t tend vers l'infini, alors la vitesse est égale à la vitesse limite.

Références

Caussarieu, A. (2020). Les différences entre les maths et les maths pour la physique. https://ditdactique.hypotheses.org/945

Chaachoua, H. (2018). T4TEL un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. In J. Pilet & C. Vendeira (Eds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM*. France : IREM de Paris – Université Paris Diderot.

Chevallard, Y. (2001). Organiser l'étude : 1. Structures et Fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la XIe École d'été de didactique des mathématiques*. (pp. 3-32). Editions la Pensée Sauvage.

De Hosson, C., Manrique, A., Leslie Regad, L., & Robert, A. (2018). Du savoir savant au savoir enseigné, analyse de l'exposition des connaissances en cours magistral de physique : une étude de cas, *RIPES*, *34*(1) https://doi.org/10.4000/ripes.1307

Di Fabio, A., de Hosson, C., & Décamp, N. (2021). Le tracé des vecteurs en cinématique : Étude de réponses d'étudiants de licence 1 de physique. *RDST*, *23*, 139-159. https://doi.org/10.4000/rdst.3765

Doukhan, C. (2022). Comment l'articulation entre théorie de l'activité et théorie anthropologique éclaire la transition secondaire-supérieur : le cas des probabilités conditionnelles. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 27,* 133-167, https://doi.org/10.4000/adsc.1432

Erduran, S., & Dagher, Z. R. (2014). *Reconceptualizing the nature of science for science education: Scientific knowledge, practices and other family categories.* Springer.

Hitier, M., & González-Martín, A. S. (2022). Derivatives and the Study of Motion at the Intersection of Calculus and Mechanics: A Praxeological Analysis of Practices at the College Level. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *8*(2), 293-317. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00182-z

Pélissier, L. & Venturini, P. (2016). Analyse praxéologique de l'enseignement de l'épistémologie de la physique : le cas de la notion de modèle. *Éducation et didactique 10*(2), 63-90. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.2502

Pollani, L., & Branchetti, L. (2022). An experience of exploring the boundary between mathematics and physics with preservice teachers. In M. Trigueros, & B. Barquero, Proceedings of INDRUM 2022 (pp. 330-339), Hannover.

Vandebrouck F. (2008). *La classe de mathématique : activité des élèves et pratiques des enseignants*, Octarès Edition, Collection Travail et Activité Humaine

Ghislaine Gueudet
Université Paris-Saclay, UR EST
91400 ORSAY
e-mail: ghislaine.gueudet@universite-paris-saclay.fr

Nathalie Lebrun
Université Paris Cité, UFR de mathématiques, LDAR
85 Boulevard Saint-Germain
75006 PARIS – France
e-mail: nathalie.lebrun@univ-lille.fr

Fabrice Vandebrouck
Université Paris Cité, UFR de mathématiques, LDAR
85 Boulevard Saint-Germain
75006 PARIS – France
e-mail: fabrice.vandebrouck@u-paris.fr