

Théorie des Situations Didactiques et situations de preuve :

étude de deux exemples

Cécile Ouvrier-Bufferet

Abstract. The framework of the theory of didactical situations is based on “experimental epistemology”. It allows us to question mathematics and learning situations. This text will present mathematical and experimental tools derived from this theory for thinking about a typology of situations for didactic use. In particular, it will focus on didactic variables and proof situations. Two examples will illustrate these aspects. From the fields of game theory on the one hand and number theory on the other, these examples will be discussed and revisited: the *Race to 20* and the Frobenius problem.

Keywords. Theory of Didactical Situations, adidactical situations, didactical variable, proof, Race to 20, Frobenius problem.

Résumé. Le cadre de la théorie des situations didactiques s’est construit dans des travaux « d’épistémologie expérimentale ». Il permet d’interroger les mathématiques et les situations d’apprentissage. Ce texte présentera les moyens mathématiques et expérimentaux issus de cette théorie pour penser une typologie de situations à usage didactique. Un focus sera fait en particulier sur les variables didactiques et les situations de preuve. Deux exemples permettront d’illustrer ces aspects. Issus des domaines de la théorie des jeux d’une part et de la théorie des nombres d’autre part, ils seront discutés et revisités : la *Course à 20* et le problème de Frobenius.

Mots-clés. Théorie des Situations Didactiques, situations adidactiques, variable didactique, preuve, Course à 20, problème de Frobenius.

Table des matières

1.	Introduction	2
2.	Émergence de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) et fondements	3
2.A.	Contrat didactique.....	4
2.B.	Situations didactiques et adidactiques	5
2.B.a.	Adidacticité	5
2.B.b.	Construire une situation adidactique ?	5
2.B.c.	Phases d’une situation adidactique.....	6
3.	La preuve en didactique : grandes lignes et spécificités dans le cadre de la TSD.....	7
3.A.	Quelques définitions	8
3.B.	La preuve chez Brousseau	9
4.	Exemple de la <i>Course à 20</i>	10
4.A.	Variables didactiques – définition	11
4.B.	Stratégies possibles dans la <i>Course à 20</i>	11

4.B.a. Jeu 1	11
4.B.b. Jeu 2	12
4.B.c. Jeu 3	12
4.B.d. Jeu 4 – un saut vers la preuve ?.....	12
4.C. Variables didactiques et savoirs en jeu dans la <i>Course à 20</i>	13
5. Exemple d'une Situation Recherche à l'université.....	14
5.A. Problème de Frobenius	14
5.B. Généralisation du problème : une Situation Recherche pour la Classe (SiRC).....	14
5.B.a. Les SiRC	14
5.B.b. Déplacements sur Z_2	15
5.B.c. Analyse <i>a priori</i> succincte et théorèmes en jeu.....	16
6. Quelques résultats avec des étudiants de première année – Conclusions et perspectives	18
Annexe.....	20
Références	21

1. Introduction

Le mot « didactique », en tant que nom, remonte à Jan Amos Komensky, alias Comenius (XVII^{ème} siècle) : « ... l'enfance est le meilleur moment pour former l'homme. Plus tard, on n'en vient pas à bout. » « ... je prends le risque de promettre une Grande Didactique, c'est-à-dire un art universel de tout enseigner à tous, sûr, rapide, solide c'est-à-dire certain quant au résultat, assez plaisant pour éviter l'ennui des élèves et des maîtres et durable ... » (Comenius, 1997). Les traductions en termes modernes de ses textes, certes à l'avantage de Comenius, montrent la nécessité d'étudier spécifiquement la didactique de chaque discipline (les savoirs qui la composent), mais aussi de prendre en compte : l'enfant et son évolution, les connaissances et les principes de leur acquisition, la place et le rôle de la mémoire, le couple maître-élève, ainsi que les institutions scolaires. Nous retrouvons aujourd'hui ces axes d'étude en didactique des mathématiques et d'autres s'y sont adjoints.

Brousseau (1997, 1998) ne s'inscrit pas dans la recherche d'une méthode universelle pour enseigner les mathématiques, comme le rappelle Kuzniak (2005) mais dans l'étude de la nature de l'activité mathématique, et ainsi des conditions et des contraintes pour favoriser les apprentissages au sein de situations reproductibles. Brousseau nous rappelle que le terme « didactique » a pu être péjoré. Reprenant ce terme « pour l'étendre à des travaux plus théoriques d'« épistémologie expérimentale » », Brousseau définit la didactique des mathématiques comme « l'étude scientifique des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques entre les hommes ou les institutions humaines. » (Brousseau, 1997, p. 2). Depuis les années 1970, les didacticiens, et Brousseau en particulier, ont développé la didactique des mathématiques : ont été construits des cadres, des méthodologies, des méthodes, des situations outillant chercheurs, formateurs, enseignants, décideurs.

Cet article a pour but d'introduire la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau (1998), en illustrant certains de ses concepts fondateurs et en faisant un focus sur la preuve. La section 2 s'intéressera au contexte d'émergence de la Théorie des Situations Didactiques, à ses fondements, et aux définitions de contrat didactique et situations adidactiques. La manière de considérer la preuve dans les travaux de Brousseau sera présentée en section 3. La section 4 proposera un exemple fondamental de la Théorie des Situations Didactiques (*La Course à 20*) et abordera plus spécifiquement la notion de variables didactiques d'une part et la preuve d'autre part, tout comme la section 5, qui permettra d'élargir le propos aux Situations de Recherche pour la Classe (SiRC, e.g. Gravier & Ouvrier-Buffet, 2022 ; Grenier & Payan, 2003) à partir d'un exemple issu de la recherche mathématique (Problème de Frobenius).

2. Émergence de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) et fondements

Les années 60 ont marqué la nécessité d'une nouvelle approche de l'enseignement des mathématiques, initiée notamment par les travaux de la CIEAEM (Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques) : il s'agissait alors de restructurer l'enseignement des mathématiques après la redéfinition des mathématiques elles-mêmes par les mathématiciens. Au tout début des années 60, se met en place le CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), au sein de l'Institut Pédagogique National, avec un fonctionnement ancré à la fois dans la recherche fondamentale, la recherche appliquée mais aussi la recherche de développement que l'on retrouvera ensuite, après 1968, dans les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques). En particulier, notons la période 1973 à 1999 où le COREM (Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), porté par Brousseau, a permis des expérimentations très cadrées et encadrées, favorisant ainsi la production, l'observation, l'analyse et la modélisation de phénomènes dans des conditions déontologiquement acceptables pour les enseignants et les élèves. Le projet scientifique de Brousseau, pour un meilleur enseignement des mathématiques, est de créer une science rattachée aux mathématiques, permettant de construire, d'anticiper, d'analyser des situations et processus complexes, et de mettre en œuvre des situations étudiées expérimentalement. Nous renvoyons au chapitre de Perrin-Glorian (1994) pour une présentation détaillée des enjeux de l'époque, du développement de la didactique des mathématiques dans différentes institutions et des premières publications montrant l'émergence du projet et des concepts de ce qui sera appelé « Théorie des Situations Didactiques » (dorénavant notée TSD) de Brousseau : situations didactiques et adidactiques ; obstacles et conceptions ; contrat didactique ; variables didactiques ; analyse *a priori* ; milieu ; dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation ; situations fondamentales, etc.

Les fondements de la TSD se trouvent dans la définition d'une situation d'apprentissage. Il s'agit d'une situation favorisant des déséquilibres et donc des rétroactions (dimension héritée de Piaget), dans un modèle ternaire¹ (le savoir, le maître et l'élève), où l'erreur² est vue comme la

¹ Modèle provenant du socio-constructivisme de Vygotsky : individu – objet – contexte social, où la médiation sociale et le langage sont fondamentaux.

² Les erreurs ne sont pas dues au hasard : elles sont reproductibles, persistantes, mais pas forcément explicites. Une erreur est la manifestation d'un obstacle : pour le franchir, il faut engager un travail de même nature que pour la mise en

manifestation d'un obstacle, d'une conception erronée (cet aspect étant hérité de Bachelard (1938)). Nous avons ainsi trois hypothèses pour engager la réflexion :

- Une hypothèse psychologique fondée sur l'apprentissage par adaptation de Piaget (1974).
- Une hypothèse épistémologique ancrée dans les travaux de Bachelard (1938) où l'on apprend en s'appuyant sur des connaissances antérieures mais aussi « contre » des connaissances antérieures. Brousseau explicite en particulier la notion d'obstacle et que, pour tout savoir, il existe une famille de situations susceptible de lui donner un sens « correct ».
- Et une hypothèse didactique précisant qu'un « un milieu sans intentions didactiques³ est manifestement insuffisant à induire chez l'élève toutes les connaissances culturelles que l'on souhaite qu'il acquière ». (Brousseau, 1986, p. 49).

Ces hypothèses conduisent à introduire un modèle de la situation didactique : situation adidactique / contrat didactique (voir ci-après la Section 2 et Bessot (2004)⁴ pour un développement et d'autres exemples). La didactique proposée par Brousseau est fondamentale, à l'intérieur des mathématiques, et les interroge : c'est la réflexion épistémologique qui permet de concevoir, anticiper et réaliser des conditions dans lesquelles les élèves vont produire un véritable travail mathématique. Ainsi, les situations doivent tenir compte à la fois de l'organisation des mathématiques, des possibilités d'apprentissage des élèves, des connaissances et des compétences des enseignants, et des cadres institutionnels. La TSD permet de conduire une analyse *a priori* des situations, en articulant les points de vue épistémologique et didactique, nous le verrons sur deux exemples dans les sections 4 et 5. Cette analyse *a priori* est fondamentale pour concevoir des situations d'apprentissage, anticiper, préparer l'observation lors de la mise en œuvre en classe. Et c'est la mise en œuvre des situations qui permet, *a posteriori*, d'éclairer l'écart entre ce qui était prévu et ce qu'il s'est passé, d'évaluer la validité et la pertinence du modèle construit, et donc d'enrichir notre connaissance didactique dans la perspective des apprentissages mathématiques.

2.A. Contrat didactique

Le contrat didactique a été défini lors de l'étude d'élèves en échec électif en mathématiques (voir les textes de Brousseau de la fin des années 70, début des années 80 analysant « le cas de Gaël »). Il s'agit de règles, pour la plupart *implicites*, construites au fil des années, révélant en fait « l'épistémologie scolaire ». Il ne s'agit pas seulement d'étudier les habitudes de classe et ce que chaque partenaire (élève, enseignant) aura à gérer en classe : il s'agit de préciser la part de contrat spécifique à la connaissance mathématique, et par là, l'épistémologie de l'enseignant et des élèves.

Si certaines manifestations du contrat didactique sont assez facilement identifiables lors de ruptures de contrat (voir les exemples ci-dessous) d'autres sont moins évidentes. Étudier le contrat didactique doit permettre d'analyser et de comprendre des phénomènes relatifs aux connaissances mathématiques :

place d'une connaissance et trouver un moyen de faire faire à l'élève un « saut qualitatif » (cf. Bachelard, 1938 ; Brousseau, 1998).

³ C'est-à-dire non volontairement organisé pour enseigner un savoir.

⁴ Texte récemment mis à jour par A. Bessot, en 2024, <https://hal.science/hal-04473846v2/document>

La connaissance sera justement ce qui résoudra les crises issues de ces ruptures ; elles ne peuvent pas être pré-définies. Pourtant, au moment de ces ruptures, tout se passe comme si un contrat implicite liait l'enseignant et l'enseigné : surprise de l'élève qui ne sait pas résoudre le problème ... Le concept théorique en didactique n'est donc pas le contrat (le bon, le mauvais, le vrai, ou le faux contrat), mais le processus de recherche d'un contrat hypothétique. C'est ce processus qui représente les observations et doit les modéliser et les expliquer. (Brousseau, 1986, pp. 52-53).

Voici quelques exemples simples et parlants permettant de pointer des éléments composant un contrat didactique, qui se manifestent clairement lors de ruptures de ces caractéristiques :

- Un problème a toujours une solution (et une seule).
- La solution s'obtient en faisant une ou plusieurs opérations : il faut trouver du premier coup la bonne opération à faire.
- Il faut utiliser tous les nombres de l'énoncé ; si les nombres sont « simples », la solution doit l'être aussi.
- De toute manière, il y a toujours une réponse à une question de mathématiques et l'enseignant la connaît. On doit donc toujours donner une réponse qui sera validée par l'enseignant ou corrigée.

Étudier le contrat, lors de ruptures de celui-ci en particulier, et en dialogue avec l'analyse du « milieu » (voir section 2.B.b) et de son évolution, est un travail complexe, certes, mais qui permet de « comprendre des dysfonctionnements profonds dans des processus d'apprentissage » (Brousseau, 1998, p. 296).

2.B. Situations didactiques et adidactiques

2.B.a. Adidacticité

Une situation didactique a pour objet l'enseignement d'une connaissance visée. Une situation adidactique est une situation à finalité didactique (c'est-à-dire organisée par un enseignant dans un contexte où la finalité est d'apprendre), où le sujet (l'élève, l'étudiant) prend la responsabilité et avance dans la résolution de la situation, indépendamment des attentes de l'enseignant. Ainsi, dans une situation adidactique⁵, c'est l'élève ou l'étudiant qui « a la main » et qui devient « responsable » de la résolution / du savoir : cette dévolution de responsabilité est délicate comme le souligne Brousseau (1986).

Nous désignerons dorénavant par « étudiant » toute personne qui étudie, pour simplifier le texte.

2.B.b. Construire une situation adidactique ?

Quelles sont les conditions pour qu'une situation puisse être vécue comme adidactique ? On imagine bien qu'il ne peut pas y avoir que des situations adidactiques et l'on parlera plus facilement de

⁵ Le « a » ici est privatif, pour faire abstraction de l'enseignant.

moments adidactiques au sein de situations didactiques. Pour qu'une situation fonctionne de manière adidactique, au minimum, il faut que (cf. Bessot, 2004 ; Brousseau, 1998) :

- L'étudiant dispose d'une procédure de base relative aux savoirs et connaissances antérieurs pour s'engager dans la résolution du problème.
- Mais cette procédure est insuffisante ou inefficace : l'étudiant est contraint de faire des accommodations, des modifications de son système de connaissance. Il demeure une incertitude de l'étudiant quant aux décisions à prendre.
- La connaissance mathématique visée est *a priori* requise pour passer d'une stratégie de base à une stratégie optimale.
- Il existe un « milieu » pour la validation : ce milieu permet des rétroactions.
- L'étudiant peut recommencer.

Le « milieu » est défini, par Brousseau, comme le système antagoniste de l'étudiant, en référence à la théorie psychogénétique de Piaget : dans une situation adidactique, le milieu peut apporter des rétroactions à l'étudiant, modifier ses connaissances, par exemple en permettant à l'étudiant d'abandonner, de changer, ou de faire évoluer une stratégie. La situation elle-même peut être source de rétroactions.

Comment aménager des moments adidactiques dans un cadre didactique ? Que comporte un « bon » milieu permettant aux étudiants de progresser dans des situations adidactiques ?

2.B.c. Phases d'une situation adidactique

Brousseau (1998) propose plusieurs phases permettant un fonctionnement adidactique dans la mise en œuvre de situations en classe : la dévolution, la situation adidactique (composée d'au moins une situation d'action, une situation de formulation, une situation de validation) et l'institutionnalisation.

- *La dévolution* est une composante essentielle du contrat didactique. Pilotée par l'enseignant, et donc didactique, elle consiste à transférer la responsabilité d'une situation d'apprentissage (adidactique ici) à l'étudiant.
- Situation adidactique
 - *Situation d'action* : la connaissance de l'étudiant se manifeste par des décisions (succès ou échec) dans l'action qui peuvent relever de « modèles implicites » (cf. Vergnaud, 1991). Actions et décisions des étudiants peuvent ne pas être verbalisées et rester « en acte ». Amener les étudiants à décrire leurs actions dans la résolution d'un problème nécessite une situation de formulation.
 - *Situation de formulation* : le succès exige qu'un étudiant formule la connaissance à l'intention de l'autre (un autre étudiant ou groupe d'étudiants), avec un langage partagé. Mais comment discuter la validité mathématique du contenu ? Cette question amène à l'organisation d'une situation de validation.
 - *Situation de validation* : il s'agit d'amener les étudiants à une construction formelle dans un répertoire de règles ou de « théorèmes » reconnus, dans un débat régi par des règles communes aux protagonistes. On se pose alors ces questions : qui valide

quoi et comment ? Par exemple, dans le cas d'un jeu, avec stratégies gagnantes, facilitateur pour la dévolution et l'enjeu de preuve (cf. section 4), cela peut se formuler ainsi : « cela fonctionne » (validation expérimentale) *versus* « pourquoi cela fonctionne à tous les coups ? » (recherche d'une validation théorique, avec les mathématiques et donc ouverture vers la problématique de la preuve). Balacheff (2010) pointe qu'il existe là un saut conceptuel important en termes de validation. C'est bien dans la situation de validation que se situe le cœur du processus de preuve.

Dans ces différents moments adidactiques (situations d'action, de formulation, de validation), l'enseignant est présent pour réguler et réorienter la classe si nécessaire : il est incitateur et modérateur (voir section 3), il impulse les situations.

Une connaissance utilisée dans une situation d'action, de formulation ou de validation et de preuve change de statut : elle peut devenir une référence pour des utilisations futures, sous conditions. En effet, une intervention spécifique de l'enseignant (mais pas que) est nécessaire pour déclarer le savoir : c'est l'objet de l'institutionnalisation.

- L'*institutionnalisation* de connaissances, procédures etc. (retour à la situation didactique) : l'enseignant, à partir des productions des étudiants, fait émerger les procédures, les formulations, les propriétés etc. attestant d'une construction de connaissances, celles-ci devenant alors partagées par la classe, mais aussi validées par l'enseignant, leur donnant ainsi un statut de savoir. À la charge de l'enseignant de construire la décontextualisation de ces connaissances nécessaires pour les rendre réutilisables dans d'autres situations⁶.

Ainsi, deux moments, gérés par l'enseignant, fonctionnent de pair : la dévolution d'une situation adidactique et l'institutionnalisation de connaissances, qui peuvent être en décalage lorsque ce qui a été dévolu aux élèves ne correspond pas à ce qui est effectivement institutionnalisé par l'enseignant. Il est donc important de se poser toujours la double question : dévolution de quoi ? institutionnalisation de quoi ?

Là où la preuve entre en jeu de manière cruciale est la situation de validation. Ces différentes situations, et en particulier la situation de validation, seront illustrées dans les sections 4 et 5.

3. La preuve en didactique : grandes lignes et spécificités dans le cadre de la TSD

Le champ d'étude de la preuve en mathématiques est vaste et les travaux de recherche sont nombreux à l'international. La preuve est en effet une activité fondamentale en mathématiques. Des processus variés en lien direct avec la preuve existent et peuvent faire l'objet d'études spécifiques : explorations d'un problème ; étude de cas particuliers, d'exemples ; formulation d'un énoncé mathématique ; formulation de conjectures ; réfutations, contre-exemples – exploration du domaine de validité d'une conjecture ; modélisation (intra- ou extra-mathématique) ; production de définitions, de théories

⁶ Le savoir mathématique lui-même est décontextualisé, dépersonnalisé. Les connaissances construites dans une situation sont contextualisées (l'enseignant a produit une contextualisation). L'institutionnalisation va permettre une décontextualisation, dépersonnalisation pour les élèves et faire émerger les connaissances/compétences attendues par l'École.

locales ; recherche de ‘patterns’ ; généralisations ; raisonnement par analogie ; raisonnement par induction ; utilisation de différentes représentations, cadres, registres ; logique ; etc.

Différentes fonctions de la preuve peuvent également être listées : décider ; justifier ou réfuter ; convaincre ; savoir ; expliquer ; découvrir (inventer de nouveaux résultats) ; communiquer ; systématiser / créer des théories locales ; illustrer de nouvelles méthodes de déduction ; défendre une définition ; défendre une axiomatique ; etc. Dans un contexte d’apprentissage, la preuve joue également le rôle d’explication et de compréhension : en effet, elle permet de comprendre les relations entre les concepts introduits et leurs raisons d’être.

Dans les travaux en didactique, le rôle fondamental de l’enseignant, à la fois incitateur et modérateur en classe, et l’importance de la construction d’une communauté mathématique en classe sont pointés depuis plus de 30 ans (e.g. Balacheff, 2024 ; Hanna, 1995 ; Stylianides, 2016 ; Yackel & Cobb, 1996). En effet, c’est à l’enseignant de valider ce qui est acceptable, d’analyser les arguments des élèves (qui ne sont pas forcément sur la validité mathématique mais cherchent à convaincre autrui), d’identifier une structure de la preuve qui sera traduite en un texte (démonstration), de prendre de la distance par rapport à l’image de la rigueur en mathématiques, etc. Pour les élèves, le « pourquoi » n’est pas forcément fondamental comme pour le mathématicien. De plus, le rapport aux mathématiques de l’enseignant va avoir un impact sur sa transmission aux élèves et aux étudiants de l’activité de preuve.

3.A. Quelques définitions

Pour structurer le propos sur la preuve, nous allons faire la distinction ici entre preuve et démonstration et préciser quelques définitions, principalement en nous référant à Balacheff (1987, p. 153), dont les travaux et définitions sur la preuve ont été largement repris et exploités en France et à l’international. Ainsi, une preuve est une « explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné ». Un débat permet de déterminer un « système de validation commun aux interlocuteurs ». Une démonstration est une forme particulière de restitution de la preuve. Un raisonnement est une « activité intellectuelle », explicite ou implicite, « de manipulations d’informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations ».

Balacheff (1987) distingue deux types de preuves :

- *Les preuves pragmatiques* qui se situent dans l’action (on trouve ici des règles d’actions, des théorèmes-en-acte non prouvés où la validité de l’action est interrogée – cf. Vergnaud, 1991).
- *Les preuves intellectuelles*, où un changement de posture est nécessaire : il s’agit de passer à une position de théoricien où la connaissance devient objet de réflexion et de débat. Là, il faut que l’étudiant soit capable de décontextualiser (i.e. accéder à une classe d’objets), dépersonnaliser (i.e. se détacher de l’action), détemporaliser (i.e. « passer de l’univers des actions à celui des relations et des opérations ») (Balacheff, 1987, p. 159).

À l’interface entre ces deux types de preuve se trouvent les exemples génériques⁷, qui vont au-delà de l’étude de cas particuliers :

⁷ On peut s’interroger sur les éléments qui sont génériques dans de tels exemples, tout comme sur les preuves génériques.

L'exemple générique consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus. La formulation dégage les propriétés caractéristiques et les structures d'une famille en restant attachée au nom propre et à l'exhibition de l'un de ses représentants. (Balacheff, 1987, pp. 164-165).

Notons que Balacheff (1987), dans cette typologie, pointe trois types de situations, chacune avec des contrats didactiques spécifiques, où la preuve aura des rôles différents :

- Les preuves pour *décider* (plutôt du côté de l'action).
- Les preuves pour *convaincre* (mettant en jeu certains aspects théoriques).
- Et les preuves pour *savoir* (et là, il s'agit d'adopter une posture de théoricien).

3.B. La preuve chez Brousseau

Comme le rappelle Balacheff (2024, p. 19), « Le postulat fondateur de la TSD énonce qu'il est nécessaire que la connaissance dont l'apprentissage est visé « ait fonctionné comme telle dans des débats scientifiques et dans les discussions entre élèves » (Brousseau, 1998, pp. 218-220). ».

L'enjeu de preuve, comme indiqué précédemment, se situe principalement dans les situations adidactiques de validation, dans un contexte socio-mathématique où chaque protagoniste doit adopter une attitude réflexive sur les savoirs en jeu :

Il ne s'agit donc pas seulement pour l'enfant de « savoir » des mathématiques mais de les utiliser en tant que raisons d'accepter ou de rejeter une proposition (un théorème), une stratégie, un modèle, ce qui exige une attitude de preuve. . . . En mathématique, le « pourquoi » ne peut pas être appris seulement par référence à l'autorité de l'adulte. . . . Nous considérons donc que faire des mathématiques est d'abord pour l'enfant une activité sociale et non pas seulement individuelle. . . . L'examen d'une preuve est une attitude réflexive. . . . En général, la preuve ne pourra être formulée qu'après avoir été utilisée et éprouvée en tant que règle implicite soit dans l'action soit dans les discussions. (Brousseau, 1998, pp. 39-40).

Dans le cadre de situations adidactiques, où les situations d'action, formulation et validation fonctionnent en dialectique :

Ils [les enfants] adoptent des théories fausses, acceptent des preuves insuffisantes ou fausses. . . . Le système de preuve fonctionne alternativement

- comme moyen implicite. Par exemple les enfants acceptent d'un accord tacite un fait non formulé ou un moyen de preuve (logique ou modèle implicite)
- comme moyen de communiquer explicitement une raison avancée
- comme objet d'étude mis consciemment à l'épreuve logique, sémantique ou pragmatique. (Brousseau, 1998, pp. 41-42).

Nous allons explorer ces dimensions et expliciter le concept de variable didactique, outil théorique permettant d'analyser une situation et de s'interroger sur la manière de faire évoluer les procédures des étudiants, sur deux exemples : le premier (*La Course à 20*, Section 4) est un exemple fondateur proposé par Brousseau. Le second (*Problème de Frobenius*, Section 5) est encore ouvert dans la recherche mathématique et nous permettra de réinvestir les outils proposés par la TSD.

4. Exemple de la *Course à 20*

Le « jeu de la preuve » proposé par Lorenzen en 1967 dans son ouvrage « Métamathématique » est en quelque sorte à l'origine de la théorie des situations (Brousseau, 2010).

Il est d'usage de présenter la *Course à 20* pour introduire la TSD⁸ car cette situation a joué un rôle dans l'élaboration de la théorie, est ancrée dans les mathématiques, et permet, même encore aujourd'hui, de nouveaux développements, comme nous le verrons dans la discussion sur les variables didactiques. Cette situation a également fait l'objet de nombreuses expérimentations avec des élèves, de l'école à l'université, et s'avère résistante et consistante, comme l'analyse didactique ci-après va le montrer. Nous prenons cette situation à la fois pour illustrer les concepts didactiques précédemment introduits et pour définir le concept de « variables didactiques ».

Le jeu se présente de la façon suivante :

Jeu 1 : « La course à 20 ». Le jeu comporte deux adversaires qui disent un nombre tour à tour. Il s'agit pour chacun des adversaires de réussir à dire 20 le premier. Le premier qui joue a le droit de dire 1 ou 2. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant 1 ou 2 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Jeu 2 : « La course à 27 ». Il s'agit de réussir à dire 27 le premier. Celui qui commence à jouer a le droit de dire un entier non nul inférieur ou égal à 4. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre inférieur ou égal à 4 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Jeu 3 : « La course à 24 ». Il s'agit de réussir à dire 24 le premier. Le premier qui joue a le droit de dire un entier non nul inférieur ou égal à 3. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre inférieur ou égal à 3 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Jeu 4 : « La course à 5929 ». Il s'agit de réussir à dire 5929 le premier. Le premier qui joue a le droit de dire un entier non nul inférieur ou égal à 2. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre inférieur ou égal à 2 au nombre que l'adversaire vient de dire.

La dévolution de la *Course à 20* (jeu et enjeu de gagner) est assurée par la transmission des règles du jeu et d'une responsabilité dans ce jeu, et comporte une phase d'action si l'enseignant joue contre un élève puis cède sa place à un autre élève. La situation d'action ici est de « jouer » (jeu à 2 joueurs) et de nouvelles stratégies apparaissent au fil des parties. La situation de formulation peut être engagée dans des jeux entre équipes (nécessité, au sein de chaque équipe, de se mettre d'accord sur une stratégie) et la situation de validation amène l'attitude de preuve qui provient d'une nouvelle consigne, à savoir la recherche de conjectures puis théorèmes utiles pour gagner. Dans toutes ces

⁸ Nous renvoyons également à Kuzniak (2005) pour un autre exemple illustratif des outils apportés par la TSD sur l'entrée dans l'enseignement des statistiques où modélisation, comparaison d'expériences, représentation graphique des séries, convergence, décision, événements et probabilités sont en jeu.

situations, les rétroactions proviennent des parties jouées entre élèves, entre équipes. L'institutionnalisation de savoirs, stratégies etc. sera faite en fonction des objectifs d'enseignement.

4.A. Variables didactiques – définition

Une variable cognitive est un paramètre de la situation qui modifie la connaissance nécessaire à la solution. Le concept de variable didactique d'une situation adidactique désigne une variable :

- « à la disposition de l'enseignant » : l'enseignant peut faire un choix en rapport avec son projet d'enseignement, choix objectivé comme une valeur de cette variable. Les autres valeurs représentent d'autres choix possibles qu'il est important de décrire pour comprendre la signification du savoir et sa portée ;
- telle que ses valeurs pertinentes changent la « hiérarchie » des stratégies possibles, ou encore change la stratégie « optimale » de la situation (et donc la signification du savoir visé).

Brousseau le définit ainsi : « Nous appellerons variables didactiques les variables de commande dont on montrera qu'elles ont un effet important – qualitatif – sur les évolutions de procédures [mises en œuvre par les élèves]. » (Brousseau, 1981, p.68).

Ainsi, une variable didactique est un paramètre (qualitatif ou quantitatif) de la situation mathématique qui peut prendre plusieurs « valeurs ». En théorie, changer la valeur d'une variable didactique impacte les procédures des étudiants. Cela signifie aussi que si l'on ne peut pas justifier le fait que la modification d'une valeur d'une variable didactique impacte la/les procédure(s) des étudiants, alors ce n'est pas une variable didactique.

Le concept de variable didactique est clairement un outil théorique d'analyse d'un problème et d'anticipation de ce qu'il peut se passer. Il permet de structurer l'analyse d'un problème mathématique et ses variations, de réfléchir à comment faire évoluer des procédures d'étudiants, de faire des choix pour un projet d'enseignement (choix dépendants des objectifs d'apprentissage) et ainsi de concevoir des situations en aménageant des moments adidactiques.

4.B. Stratégies possibles dans la *Course à 20*

4.B.a. Jeu 1

Dans ce premier jeu, gagne celui qui joue le premier en disant 2, puis 5, 8, 11, 14, 17, 20 (qu'il peut dire quoi que dise l'adversaire)⁹.

Très vite, on « sait » que celui qui dit 17 a gagné : la course à 20 devient ainsi la course à 17. On peut donc réitérer le raisonnement. En fait, la suite gagnante se trouve « en descendant » : 20, 17, 14 etc. Pour construire ce raisonnement, il faut faire l'hypothèse qu'une stratégie gagnante existe et que l'adversaire détient la stratégie gagnante. Les valeurs trouvées sont des *positions gagnantes*, que l'on trouve par soustractions répétées : elles représentent le *noyau*. En théorie des jeux, le noyau est

⁹ Exemples de formulations d'élèves de 10 ans (Brousseau, 1998, p. 42), des « bonnes et mauvaises » raisons :
(sémantique) Si je dis 15, je perds, parce que toutes les fois que j'ai joué 15, j'ai perdu.
(pragmatique) En jouant 14, je gagne, la preuve, faisons-le ... je gagne.
(intellectuelle) Si je joue 17, je gagne car l'autre joue 18 ou 19, et alors moi je joue 20 dans les deux cas.

l'ensemble des nœuds depuis lesquels la victoire est assurée si l'on y parvient en cours de jeu et qu'on joue de façon optimale ensuite.

4.B.b. Jeu 2

Par un raisonnement analogue au 17 de la course à 20, on se pose la question suivante : pour arriver à dire 27 le premier, quel nombre faut-il dire juste avant ? On peut faire la liste de tous les cas possibles pour déterminer l'avant-dernière position gagnante : Si je dis 26, mon adversaire peut ajouter 1 et dire 27 ; si je dis 25, mon adversaire peut ajouter 2 et dire 27 ; si je dis 24, mon adversaire peut ajouter 3 et dire 27 ; si je dis 23, mon adversaire peut ajouter 4 et dire 27 ; si je dis 22, quoi qu'ajoute mon adversaire – 1, 2, 3 ou 4 – j'ajouterais le complément à 5 : $1+4$, $2+3$: je dirais donc 27 le premier.

Ainsi, la stratégie gagnante est la suivante : gagne celui qui joue le premier en disant 2. Et le noyau peut être décrit : $\{27, 22, 17, 12, 7, 2\}$.

Cette situation permet un réinvestissement de la stratégie obtenue dans le Jeu 1.

4.B.c. Jeu 3

Pouvez-vous gagner en utilisant la stratégie que vous avez proposée après le jeu 2 ? Non, gagne celui qui joue le deuxième en disant 4 que l'on ne peut jamais dire le premier. Là aussi, il est possible de réinvestir la stratégie précédente et de décrire le noyau $\{24, 20, 16, 12, 8, 4\}$. Cette situation permet d'invalider la propriété suivante « Gagne celui qui commence. ».

4.B.d. Jeu 4 – un saut vers la preuve ?

Dans le jeu 4, le jeu de la course à 5929, devient le jeu de la course à 5926, puis à 5923, etc. Par économie, on n'écrira pas le noyau. Ici, le jeu se transforme en : Qui gagne ? Faut-il commencer ? Si oui, en disant quel nombre ? La soustraction itérée étant en jeu, on peut convoquer la division euclidienne ou tout raisonnement équivalent mettant en jeu les multiples (répertoires de multiples) voire des essais-erreurs, ou les congruences (tout dépend du niveau de connaissances), pour conclure que : « Gagne celui qui joue le premier en disant 1 », ou encore, « Il existe une stratégie gagnante pour le joueur qui commence (1 étant une position gagnante puisque $5929 = 1956 \times 3 + 1$) ».

Dans la *Course à 20*, les dynamiques des dialectiques d'action et de formulation dans le jeu amènent les élèves à identifier des erreurs, voire même des théories locales ; le milieu évolue au fil du jeu. La validation est d'abord sociale et culturelle. La validité d'une connaissance ou d'une stratégie peut être établie selon les règles du débat scientifique. Et il est possible de construire un répertoire de règles, propositions, théorèmes.

Deux questions peuvent être posées ici :

- Quelles sont les variables didactiques et l'intérêt de chacune des valeurs prises ci-dessus ?
- Quels savoirs mathématiques institutionnaliser ?

Comme nous l'avons vu précédemment, les réponses à ces deux questions sont en lien avec un projet d'enseignement. Mais restons à un niveau théorique d'analyse mathématique pour envisager les variables didactiques, stratégies et savoirs afférents.

4.C. Variables didactiques et savoirs en jeu dans la *Course à 20*

Nous allons traiter ici le cas général du jeu à deux joueurs de la *Course à n*, où on ajoute un pas de $1, 2, \dots, p$ (n et p entiers strictement positifs).

La première variable didactique est la relation entre n et p . La deuxième est la taille de n relativement à p . Nous pouvons les discuter de la façon suivante (cf. Bessot, 2004 ; Brousseau, 1998) :

V1 : n multiple de $(p + 1)$ ou non

- Si n n'est pas multiple de $(p + 1)$ il faut commencer [jeux 1,2,4].
- Si n est multiple de $(p + 1)$, il ne faut pas commencer [jeu 3].

V2 : taille de n relativement à p (n « petit » ou « grand » par rapport à p)

- Si n est « petit » par rapport à p : l'écriture du noyau est possible. La stratégie de soustractions itérées de $(p + 1)$ est une stratégie optimale concurrente à la division euclidienne qui ne donne pas le noyau [jeux 1,2,3].
- Si n est « très grand » relativement à p [jeu 4]
 - La stratégie de soustractions itérées devient très coûteuse.
 - Le jeu change alors de nature : pour gagner, faut-il commencer ? en disant quel nombre ?
 - La stratégie des soustractions itérées doit s'adapter et se transformer (on cherche à soustraire à n le multiple de $(p + 1)$ le plus grand possible).

La discussion de ces deux variables didactiques fait émerger plusieurs savoirs mathématiques, en lien avec les résolutions présentées précédemment : stratégie gagnante, noyau, soustraction itérée (et donc division euclidienne voire congruences).

La division euclidienne de n par $(p + 1)$ s'écrit : $n = (p + 1) \times q + r$ avec $0 \leq r < (p + 1)$.

Le « sens » de cette division (dans les jeux de la *Course à n*) est la soustraction répétée de $(p + 1)$ à n : le plus petit entier auquel on arrive est le reste.

Une troisième variable didactique, implicite dans le cas étudié ci-dessus, est à considérer : le pas $1, 2, \dots, p$ est constitué d'entiers consécutifs (à partir de 1). Si ce n'est pas le cas, toutes les positions ne seront pas nécessairement atteignables et la soustraction itérée ne sera pas un savoir pertinent pour déterminer la stratégie optimale.

Nous pouvons étudier cela dans le jeu suivant :

Jeu 5. « La course à 20 – nouvelles règles ». Il s'agit de réussir à dire 20 le premier. Le premier qui joue a le droit de dire 1 ou 3 ou 4. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant 1 ou 3 ou 4 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Dans ce jeu, nous pouvons construire le noyau ($\{4, 6, 11, 13, 18, 20\}$ – à valider et prouver !), mais se pose encore la question de la stratégie gagnante et de sa généralisation, et donc des connaissances en jeu. Il s'agit en fait d'une nouvelle situation mathématique à étudier.

5. Exemple d'une Situation Recherche à l'université

5.A. Problème de Frobenius

D'un point de vue mathématique, la question posée en fin de Section 4 n'est pas sans lien avec le problème de Frobenius, NP-difficile, encore ouvert dans la recherche : « Étant donné des entiers positifs a_1, \dots, a_n premiers entre eux dans leur ensemble, trouver le plus grand entier (nombre de Frobenius) qui n'est pas une combinaison linéaire de a_1, \dots, a_n à coefficients entiers positifs. ». Le nombre de Frobenius existe et est fini.

On trouve une simplification de ce problème dans PISA (2009¹⁰) : « Serait-il possible de mettre en place un système de pièces de monnaie en n'utilisant que les valeurs 3 et 5 ? Plus spécifiquement, quels sont les montants qui pourraient être obtenus sur cette base ? Un tel système serait-il souhaitable ? ». Des expérimentations ont été réalisées en lien avec ce problème pour deux entiers premiers entre eux, dès le collège, sur un temps long (voir par exemple Combes et al. (2004) et les dispositifs de recherches collaboratives de résolution de problèmes à l'IREM de Montpellier).

Pour l'analyse mathématique du problème de Frobenius (résolution pour les cas $n = 2, 3, 4$), nous renvoyons à l'ouvrage de Ramirez Alfonsin (2006). Plusieurs cadres mathématiques peuvent être convoqués pour le traiter (le cas $n = 2$ est à lui seul particulièrement riche).

5.B. Généralisation du problème : une Situation Recherche pour la Classe (SiRC)

5.B.a. Les SiRC

Les principaux objectifs d'une SiRC sont de placer les étudiants dans le rôle de chercheurs en mathématiques et d'identifier et analyser les raisonnements et preuves des étudiants. On peut donner la définition suivante d'une SiRC (dérivée de Grenier et Payan (2003) et Gravier et Ouvrier-Bufferet (2022)) : le problème doit s'inscrire dans une problématique de chercheurs professionnels (proximité avec des questions non résolues en mathématiques) ; le problème et la/les questions initiaux doivent être faciles d'accès. C'est aux étudiants, qui travaillent en groupes, et non à l'enseignant, de fixer leurs variables (de recherche). Il existe des stratégies initiales ne nécessitant pas de prérequis, mais aussi plusieurs stratégies d'avancée dans le problème et plusieurs développements possibles. Il n'y a que des critères de fin locaux (une question résolue renvoie à une autre question). De plus, la recherche est gérée par les étudiants (et non induite par l'enseignant) et un dispositif de communication des résultats (article, présentation type séminaire) doit être prévu pour clore la SiRC, valoriser le travail des étudiants et ainsi institutionnaliser des résultats mathématiques, même locaux (définitions, propriétés, théorèmes, etc.). Ce type de situations est mis en œuvre de l'école à l'université, sur un temps long.

¹⁰ "Coinage system - Would it be possible to establish a coinage system based on only the denominations 3 and 5? More specifically, what amounts could be reached on that basis? Would such a system be desirable? This problem does not necessarily derive its quality from its closeness to the real world; rather, it is mathematically interesting and calls on mathematical processes that are related to mathematical literacy. The use of mathematics to explain hypothetical scenarios and explore potential systems or situations is one of the most powerful features of this example, even if its actual scenarios or systems are unlikely to be carried out in reality. Such a problem would be classified as belonging to the scientific situation type." (PISA, 2009, p. 93).

Les fondements didactiques pour concevoir, analyser (analyses *a priori* et *a posteriori*) et mettre en œuvre les SiRC s'inscrivent dans la TSD préservant les dialectiques de l'action, de la formulation et de la validation (Grenier & Payan, 2003). Après la dévolution d'une situation-recherche, la situation d'action consiste en l'exploration d'un problème de recherche, elle ne se présente pas nécessairement sous forme de jeu comme dans *La Course à 20*. Certaines rétroactions peuvent être disponibles, notamment pour les SiRC disposant d'un matériel de manipulation. La situation de formulation (travail de groupe, préparation d'un exposé) permet aux étudiants de décrire leurs actions. La validité du contenu mathématique construit par les étudiants (stratégie, connaissance, définitions, propositions, théorèmes, preuves etc.) peut être discutée lorsqu'une situation de validation (sociale et culturelle) est organisée, dans la confrontation des travaux de groupes et dans la préparation d'un exposé, selon les règles du débat scientifique.

5.B.b. Déplacements sur \mathbb{Z}^2

Nous proposons ici d'étudier non pas le problème de Frobenius, mais sa version sur \mathbb{Z}^2 . Il ne s'agit en fait pas du même problème mathématique, mais certains faits mathématiques sont convergents. Un point de la grille est un point du maillage. Étant donné la grille \mathbb{Z}^2 , un certain nombre de déplacements dits élémentaires (i.e., un vecteur à coordonnées entières), quels points de la grille sont atteignables, à partir d'un point donné, par combinaisons linéaires entières positives des déplacements élémentaires ?

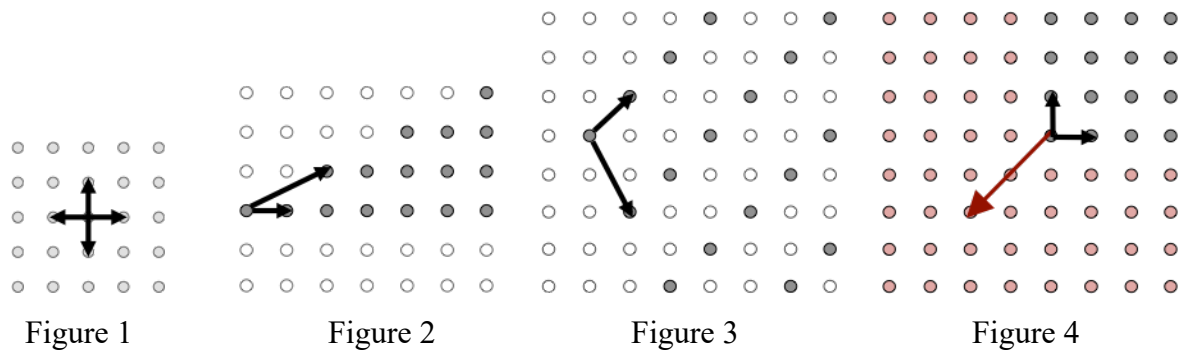
Voici un rapide traitement mathématique de ce problème (cf. Ouvrier-Bufferet 2003, 2011, sous presse, pour plus de détails).

- 1) Existence : il existe un ensemble de déplacements générant tous les points de la grille (il suffit de prendre quatre déplacements unitaires dans les quatre directions de la grille) (Figure 1).
- 2) Deux propriétés permettant de caractériser l'aspect « générateur » : la « densité », lorsque tous les points d'une zone de la grille sont atteints, d'une part (Figure 2), et « un peu partout » (i.e. proche de n'importe où¹¹) c'est-à-dire quel que soit un point P de la grille, il existe un point atteint A « proche » tel que la distance entre P et A soit bornée (indépendamment de P), d'autre part (la Figure 3 illustre la propriété « un peu partout » dans un secteur délimité par deux déplacements).
- 3) Problème inverse et minimalité : une fois l'ensemble des points atteints déterminé, on peut alors étudier la question suivante : Est-il possible d'enlever un déplacement élémentaire sans changer l'ensemble des points atteints ?

Cette question est celle de la minimalité de l'ensemble donné. Un ensemble de déplacements élémentaires est dit « minimal » lorsque la suppression de l'un de ces déplacements élémentaires modifie l'ensemble des points atteints. On peut se poser alors la question de la caractérisation d'ensembles générateurs du plan discret qui sont minimaux (un tel ensemble est dit « générateur minimal », exemple Figure 4). Enfin, les ensembles générateurs d'un secteur donné du plan discret

¹¹ Semblable à la propriété « relativement dense » en cristallographie.

(ou de tout le plan discret) et minimaux (au sens ci-dessus) sont-ils *minimums*, c'est-à-dire, ont-ils tous la même cardinalité ?



5.B.c. Analyse *a priori* succincte et théorèmes en jeu

Nous pouvons identifier plusieurs variables didactiques : nature de la grille, nombre de déplacements, choix de valeurs pour les déplacements (orienté vers certaines propriétés identifiables expérimentalement). Les valeurs pour définir les déplacements vont avoir un impact sur les procédures de résolution et la définition des concepts en jeu, comme le montre l'analyse proposée dans Ouvrier-Bufferet (2003, 2011, sous presse).

En termes de TSD, la dévolution est assurée du fait de son inscription dans un dispositif de type SiRC et une première phase d'action est possible avec l'étude de petits cas et donc de faits (expérimentaux) mathématiques facilement accessibles : la dévolution est ainsi favorisée en fonction des choix de premiers cas à étudier donnés aux étudiants (valeurs en jeu dans les déplacements à choisir). Il est aussi possible de faire la dévolution d'une situation de construction de définitions (Ouvrier-Bufferet, 2003). Dans la situation expérimentée avec des étudiants de première année, trois problèmes initiaux sont proposés pour faire évoluer le « milieu » de la situation, et donc les procédures des étudiants, et négocier un contrat spécifique, en dehors de l'algèbre linéaire (voir Annexe) :

- Le problème 1, avec deux déplacements, qui ne suffisent pas pour atteindre tous les points de la grille, permet de négocier cette situation comme différente de l'algèbre linéaire « connue ».
- Le problème 2 permet de faire émerger les notions de dépendance et de redondance, car il est possible de supprimer l'un des déplacements proposés sans changer l'aspect « générateur ».
- Le problème 3 comprend un ensemble générateur et minimal de quatre déplacements et permet de faire émerger le fait que trois déplacements ne sont pas toujours suffisants. Et, en conséquence, que le théorème de la dimension est faux dans le cas discret.

Plusieurs situations de formulations sont possibles : formulation du problème, des questions que l'on se pose, de propriétés, et d'énoncés mathématiques (qui sont à prouver). La validation est à la fois expérimentale (dans l'étude de petits cas) et théorique (dans l'étude du cas général nécessitant la définition de certains concepts et la preuve de théorèmes). La situation de validation provient du dispositif : échange entre pairs, préparation d'un exposé. L'institutionnalisation, à discuter relativement à des connaissances et compétences antérieures et un projet d'enseignement, peut résider dans la nature d'heuristiques mobilisées dans la résolution du problème (exploration de petits cas ; conjecture ; définitions ; preuve), mais aussi dans la formalisation d'énoncés mathématiques (prouvés

ou à prouver) et de concepts transversaux aux mathématiques (ensemble générateur, ensemble générateur minimal, « base », « dimension »). Ces contenus et heuristiques sont présentés en détails dans Ouvrier-Bufferet (sous presse).

Les connaissances en jeu concernent les nombres premiers, le théorème de Bachet-Bézout, le petit théorème de Fermat, l'algorithme d'Euclide, mais aussi des concepts plus transversaux que l'on retrouve en algèbre linéaire (générateur, dépendance et indépendance, minimalité, base et dimension) mais aussi dans d'autres domaines des mathématiques.

Nous avons vu ci-dessus que plusieurs faits expérimentaux et concepts sont à caractériser : la densité, « un peu partout », générateur, minimalité. Il est possible de s'engager dans un processus de définition, par exemple : « un ensemble de déplacements est minimal si enlever un déplacement modifie l'ensemble des points atteints » et reposer de nouvelles questions telle que : « Les ensembles minimaux et générateurs de déplacements sont-ils minimums ? (i.e. même cardinalité) », ce qui n'est pas le cas, et c'est l'un des intérêts de l'étude du cas discret. En effet, on « remet en cause » des résultats de l'algèbre linéaire (en particulier : les concepts de base, famille libre (unicité) et génératrice (existence, combinaisons linéaires), et le fait que toutes les bases d'un espace vectoriel ont le même nombre d'éléments).

Pour la production de théorèmes, nous pouvons revenir à \mathbb{Z} avant de voir le prolongement sur \mathbb{Z}^2 .

Théorème 1 (sur \mathbb{Z}) : quel que soit k entier, il existe un ensemble minimal générateur de k déplacements.

Deux exemples pour illustrer sur \mathbb{Z} :

$E = \{1; -1\}$: si on enlève 1, on perd la densité.

$F = \{2; 3; -6\}$: si on enlève 2 ou 3, on perd la densité. Et si on enlève -6, on perd la propriété « un peu partout ».

Théorème 2 (sur \mathbb{Z}^2) : quel que soit k entier, il existe un ensemble minimal générateur de k déplacements.

L'étude pragmatique et expérimentale des premières valeurs de k permet d'aborder ce théorème d'existence.

Éléments pour la preuve

Pour construire un ensemble générateur minimal de k déplacements élémentaires, il suffit de construire un ensemble générateur minimal de $(k - 2)$ déplacements horizontaux, permettant de générer \mathbb{Z} (avec l'aide du théorème de Bachet-Bézout, utilisé pour prouver le théorème 1). Il suffit alors d'ajouter deux déplacements élémentaires verticaux. Mais, k étant donné (aussi grand que l'on veut), nous ne savons pas construire tous les ensembles de k déplacements élémentaires générateurs minimaux. La manière de les construire est une question ouverte ici.

6. Quelques résultats avec des étudiants de première année – Conclusions et perspectives

Les éléments décrits ci-dessous reprennent les principaux résultats d'une expérimentation, d'une durée de trois heures, conduite avec des étudiants de première année d'université ayant déjà eu un cours d'algèbre linéaire. La finalité était le rendu d'une narration écrite de leur recherche. Il s'agissait d'impliquer les étudiants dans une situation-recherche par l'exploration d'un problème discret nécessitant de définir des concepts (dont la proximité avec l'algèbre linéaire pourrait être débattue) et de s'engager dans un processus de preuve.

Les étudiants s'inscrivent rapidement dans le cadre de l'algèbre, utilisant les termes de « générateurs », « libres », mais sans définition et sans lien avec les spécificités du problème discret, et des systèmes d'équations comme le montre cet extrait des rendus écrits lors de l'étude du Problème 1 :

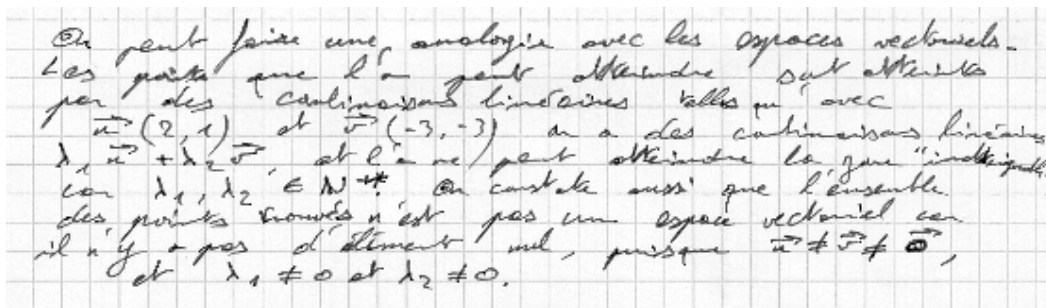


Image 1 – Extrait d'une production d'un groupe d'étudiants

Les étudiants ne questionnent pas le théorème de la dimension, pas plus qu'un ensemble de k déplacements, générateur minimal, avec $k > 4$. Le fait que deux déplacements pourraient suffire est très persistant.

Cependant, le problème discret parvient à être identifié malgré tout pour lui-même, du fait de différences avec l'algèbre linéaire, comme le montre cet extrait :

373 S : Parce que justement ce n'est pas un espace vectoriel, je veux dire ça y ressemble, mais ce n'est pas un espace vectoriel. Déjà il n'y a pas d'élément nul, et en plus les lambdas dont on pourrait se servir, ils ne peuvent pas être négatifs. Comment dire, en fait, tu as seulement deux types de déplacement, mais tu ne peux pas faire, en fait, par exemple quand tu fais le (3; 3), comme ça tu ne peux pas faire le (3; 3), dans l'autre sens. Et pareil avec le (2; 1), tu ne peux pas faire le, le(-2; -1).

Nous notons une réelle difficulté à identifier la propriété « densité », peut-être du fait de la prédominance de la propriété « un peu partout » et des « 4 points cardinaux¹² ». En revanche des définitions-en-acte et propriétés-en-acte montrent que les étudiants font un focus sur « les » 4 déplacements élémentaires (Figure 1 et extrait ci-dessous), tentent systématiquement de se ramener à ces déplacements (par combinaisons linéaires des déplacements donnés dans les trois problèmes, cf.

¹² Nord, Sud, Est, Ouest (ou vers le haut de la feuille, le bas, etc.).

Annexe), et considèrent qu'un ensemble est non-minimal quand un déplacement est combinaison linéaire d'autres.

- 178 B : Pour pouvoir aller partout, il faudrait qu'on ait une combinaison ... Pour savoir si on peut aller sur chaque point de la grille exactement, on prend ça, avec les coordonnées multipliées par a, b, c ou d (c'est nos alpha, bêta, gamma ...). Tu essaies, si tu trouves $(1; 1)$, ça veut dire que tu peux aller là. Ensuite, tu fais ce système avec $(1; 1)$, pour voir si tu as des solutions. Tu fais le système avec $(1; -1)$, pour voir si tu peux aller là, et avec $(-1; 1)$, et avec $(-1; -1)$.
- 179 A : Oui, pour voir si tu peux atteindre les quatre points qu'il y a autour !
- 180 B : Ça veut alors dire que tu peux aller partout. Si on peut prouver ça, on aura plus de questions à se poser. Et si on peut pas le prouver ... ça veut dire qu'il y a des conditions, et vu que c'est compliqué, soit il y a une technique ...
- 181 A : C'est pas ces quatre-là. Il faut prendre ceux-là.
- 182 B : Ah oui! Il faut prendre $(1; 0)$ $(-1; 0)$ $(0; 1)$ et $(0; -1)$. Ça nous fait quand même quatre systèmes d'équations à résoudre ! Mais il y a plein de solutions avec ça ! Mais prouver qu'il y en a une, ça suffit. Et il faudra qu'elle marche pour l'autre aussi. (Ils font les calculs, cherchent les coefficients par essais-erreurs).

Toujours dans la dialectique action-formulation, nous avons observé des définitions et propriétés opératoires chez les étudiants :

- Une définition naturelle de « générateur » consistant à « atteindre tous les points de la grille », transformée en une propriété opératoire : « générer 4 points ou déplacements ».
- La propriété « avoir toutes les directions représentées (droite, gauche, haut, bas) » apparaissant comme une condition nécessaire, comme le montrent les extraits suivants :

« Groupe D : Mais après, peut-être que ... on peut pas supprimer d_1 , parce que c'est le seul qui nous fait monter. On peut pas supprimer d_2 , c'est le seul qui nous fait aller à gauche.

Groupe P : Si on supprime d_1 il y a déjà toute la partie du haut qui se supprime. C'est bien ça ? (...) Pareil si on supprime d_2 on va rester dans cette zone. Ça, ça se supprime. On n'atteint jamais cette zone. »

En fait, des définitions-en-acte, opératoires dans le traitement de certains cas mais non énoncées comme des définitions, sont utilisées par les étudiants mais ne prennent jamais un statut de définition mathématique. Il s'agit en particulier de définitions-en-acte de « générateur minimal » (lorsque tous les déplacements sont utilisés dans la recherche de quatre déplacements unitaires) et « d'ensemble minimal » (un ensemble de déplacements n'est pas minimal lorsqu'un déplacement est combinaison entière des autres.), ce qui impacte les procédures des étudiants dans les situations de formulation en particulier.

Ce qui nous permet de conclure que les définitions-en-acte montrent que les étudiants se détachent difficilement des cas proposés et ne s'engagent pas dans un questionnement en lien avec la généralisation de leurs observations : il n'y a donc pas d'évolution des définitions-en-acte vers des énoncés mathématiques et donc pas d'engagement dans un processus de preuve. Même si la distance entre manipulation et formalisation est (trop) peu travaillée dans l'enseignement, ce phénomène s'interprète aussi grâce au cadre de la TSD. En effet, il s'agit là de difficultés dans les situations de formulation et de validation. En particulier, l'articulation définition-preuve est à construire chez les étudiants, et une formulation des énoncés mathématiques serait à solliciter davantage pour fonder un travail sur la preuve plus poussé. Il n'y a pas eu de réelle situation de validation. Nous pouvons étendre ce constat aux SiRC en général, en soulignant l'importance de l'ingénierie didactique¹³ dans la conception des situations de formulation et de validation et dans la problématisation de leur dialectique : c'est bien le problème de validation qui doit émerger, comme le rappelle Balacheff (2024)¹⁴.

En ce qui concerne le problème des déplacements sur la grille en soi, nous avons pointé les spécificités du cas discret, mais il nous faut constater la prégnance du modèle « algèbre linéaire », mal maîtrisé par les étudiants. La négociation du contrat, en dehors de ce modèle, n'a pas été complètement réussie, et le milieu de la situation pourtant défini dans le discret, n'a pas atteint son but. Il est difficile de mettre en place une problématique hors de l'algèbre notionnel et de réussir la décontextualisation. C'est un travail mathématique à part entière, à développer en collaboration avec les mathématiciens, au-delà du seul champ de l'algèbre ici, puisque les concepts en jeu le dépassent. Le cas discret est plus complexe, mais plus abordable et plus riche, permettant de « séparer » les propriétés et les concepts, notamment de générateur, minimalité et dépendance. Cette richesse mathématique reste à exploiter, en particulier dans la perspective d'une transposition pour les étudiants (par exemple dans un Travail Encadré de Recherche), ou dans la formation des enseignants, afin d'engager les étudiants dans une démarche mathématique fructueuse. Au niveau didactique et des apports de la TSD sur ce problème mathématique, les concepts de contrat didactique et de milieu éclairent les difficultés des étudiants. De plus, le concept de variables didactiques et les situations d'action, formulation, validation permettent d'anticiper et de structurer davantage la mise en œuvre pour éviter les écueils constatés plus haut. Ce travail est à poursuivre dans le cadre de la conception et la mise en œuvre des SiRC, en particulier à l'université.

Annexe

Consignes générales

Aujourd'hui, nous allons nous intéresser à des déplacements sur une grille (feuilles jointes).

Dans chaque problème, on s'autorisera un ensemble de déplacements. Ces déplacements pourront être utilisés autant de fois que l'on veut, et ce, dans n'importe quel ordre.

On se donne un « point de départ » A (choisissez-le à proximité du centre de la feuille).

Pour chacun de ces problèmes, on se posera les questions suivantes :

¹³ Pour la définition d'ingénierie didactique, voir Artigue (1990).

¹⁴ « La situation de preuve doit donner aux élèves les raisons de s'engager dans une validation par les connaissances (théorèmes et théorèmes-en-acte, règles d'inférence, contrôles) » (Balacheff, 2024, p. 50).

- Partant du point A, quels points de la grille peut-on atteindre ?
- On se donne un autre point : B. Peut-on aller de A vers B ? Si oui, y a-t-il différentes manières de s'y rendre ? Qu'est-ce que vous entendez par « différent » ?
- Peut-on supprimer un ou plusieurs déplacements ? Si oui, quelles en sont les conséquences ?

Problème 1

- Les déplacements autorisés sont :
 d_1 : 2 carreaux à droite et 1 carreau en haut.
 d_2 : 3 carreaux à gauche et 3 carreaux en bas.
- Le point B est situé trois carreaux à droite et trois carreaux en bas de A.

Problème 2

- Les déplacements autorisés sont :
 d_1 : 2 carreaux à droite et 3 en haut
 d_2 : 5 carreaux à gauche et 2 en bas
 d_3 : 5 carreaux à droite et 3 en bas
 d_4 : 1 carreau à droite.
- Le point B est situé deux carreaux à droite et deux carreaux en bas de A.

Problème 3

- Les déplacements autorisés sont :
 d_1 : 3 carreaux à droite et 3 en haut
 d_2 : 2 carreaux en haut
 d_3 : 1 carreau à gauche
 d_4 : 1 carreau à gauche et 3 en bas.
- Le point B est situé un carreau à droite et six carreaux en haut de A.

Références

- Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Bachelard, G. (1938). *La Formation de l'esprit scientifique*. Éditions Vrin.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176. <https://doi.org/10.1007/BF00314724>
- Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in math: a didactical perspective. In G. Hanna et al. (Eds.), *Explanation and proof in mathematics* (p. 115-135). Springer.
- Balacheff, N. (2024). Situations pour l'apprentissage de la preuve en mathématiques. État de la recherche et questions ouvertes. *Recherches en Didactique des Mathématiques. Synthèses et*

- perspectives en didactique des mathématiques. Preuve, modélisation et technologies numériques*, 15-59. <https://doi.org/10.46298/rdm.12905>
- Bessot, A. (2004). Une introduction à la théorie des situations didactiques. *Cahiers du Laboratoire Leibniz*, 91. hal-00078794
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), 37-127.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. *Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal*. <http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/Brousseau.pdf>
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.
- Combes, M.-C., Saumade, H., Sauter, M., & Théret, D. (2004). Cinq classes au pays de 9 et 11. *APMEP*, 455, 829-846.
- Comenius (1997). *La Grande Didactique*. Klincksieck.
- Gravier, S., & Ouvrier-Bufferet, C. (2022). The mathematical background of proving processes in discrete optimization—exemplification with Research Situations for the Classroom. *ZDM - Mathematics Education*, 54, 925-940.
- Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situations de recherche en “classe”, essai de caractérisation et proposition de modélisation. In V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (Eds.), *Actes du Séminaire National de didactique des mathématiques* (p. 189–205). IREM de Paris 7.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.
- Kuzniak, A. (2005). La théorie des situations didactiques de Brousseau. *Repères IREM*, 61, 19-35.
- Lorenzen, P. (1967). *Métamathématique*. Gauthier-Villars.
- Ouvrier-Bufferet, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble. Disponible en ligne : <https://theses.hal.science/tel-00005515>
- Ouvrier-Bufferet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 165-182.
- Ouvrier-Bufferet, C. (sous presse). Approaching transversal concepts with discrete mathematics: a situation from ongoing mathematical research for undergraduate students. *EpiDEMES*. Disponible en ligne : <https://hal.science/hal-03793651>
- Perrin-Glorian, M.-J. (1994). Théorie des Situations Didactiques : naissance, développement, perspectives. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavnogot (Dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France – Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (p. 97-147). La Pensée Sauvage.

- Piaget, J. (1974). *Introduction à l'épistémologie génétique*. PUF.
- PISA (2009). *PISA 2009 Assessment Framework – Key competencies in reading, mathematics and science*. OECD.
- Ramirez Alfonsin, J.L. (2006). *The Diophantine Frobenius Problem*. Oxford University Press.
- Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.
- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 133-169.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Socio-mathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458–477.

Cécile Ouvrier-Bufferet
Université Paris-Est Créteil
LDAR, Paris
e-mail: cecile.ouvrier-bufferet@u-pec.fr