Quelques pistes pour améliorer les usages de l'implication mathématique en début d'université

Viviane Durand-Guerrier & Zoé Mesnil

Abstract. In France, fresh university students face from the very beginning the need to study and develop by themselves more and more complex reasoning and proofs, which they had little opportunity to meet in their secondary studies, including in the scientific tracks. In this article, we focus on the notion of implication. We first come back to the main known difficulties; then we present theoretical tools allowing to foresee and analyze these difficulties. Based on our practice as teachers in undergraduate mathematics and by research in didactics of mathematics, we consider that for the teaching of notions of logic it is necessary to find a balance between a formal approach, which is known to be not effective, and an approach that would eliminate the formal aspects which is also known to be not effective. Then, we will propose activities aiming explicitly to work on aspects related to the notion of implication, while mentioning opportunities for reinvesting the knowledge developed during these activities in the teaching and learning of other concepts.

Keywords. Logic, implication, operational invariant, syntax, semantics

Résumé. En France, à leur arrivée dans l'enseignement supérieur, les étudiant·e·s sont confronté·e·s à la nécessité d'étudier et d'élaborer par eux-mêmes ou par elles-mêmes des raisonnements et des preuves de plus en plus complexes, ce qu'ils et elles ont peu eu l'occasion de faire dans leurs études secondaires, y compris dans les sections scientifiques. Dans cet article, nous nous intéressons à la notion d'implication. Nous revenons d'abord sur les principales difficultés connues, puis nous présentons des outils théoriques permettant de prévoir et d'analyser ces difficultés. En appui sur notre pratique d'enseignantes en licence de mathématique et sur les recherches en didactique des mathématiques, nous considérons que pour l'enseignement des notions de logique il est nécessaire de trouver une position d'équilibre entre une approche trop formelle dont on sait qu'elle n'est pas efficace, et une approche qui évacuerait les aspects formels dont on sait aussi qu'elle n'est pas efficace. Ensuite, nous proposerons des activités visant explicitement à travailler sur des aspects liés à la notion d'implication, tout en mentionnant des opportunités de réinvestir les connaissances développées lors de ces activités dans l'enseignement et l'apprentissage d'autres notions.

Mots-clés. Logique, implication, invariants opératoires, syntaxe, sémantique

Table des matières

1. Introduction

Le contenu de cet article s'appuie de manière complémentaire sur les résultats de travaux de recherche portant sur l'enseignement et l'apprentissage de la logique en début d'université et à la transition lycée université et sur nos expériences d'enseignantes en début de licence de mathématiques et en formation des enseignant·e·s de mathématiques du second degré, ainsi que sur nos expériences en formation continue au sein des IREM de Paris et de Montpellier. Dans cet article, « logique » est entendue comme « logique classique du premier ordre ». Nous nous intéresserons particulièrement aux usages de l'implication. Celles et ceux qui arrivent à l'université n'en connaissent généralement pas de définition, mais ont déjà développé depuis le collège des usages en acte vis-à-vis de ce connecteur. Nous reviendrons sur les principales difficultés identifiées relativement à ces usages, puis, après avoir pris le temps de présenter les références théoriques qui nous aident à analyser ces difficultés et à penser à des activités pour y remédier, nous présenterons quelques exemples de telles activités.

Les étudiant·e·s se retrouvent bien plus souvent dans le supérieur qu'au lycée face à la tâche « démontrer la proposition : $\forall x \in E, P[x] \Rightarrow Q[x]$ », avec à leur charge d'introduire un élément générique, c'est-à-dire utiliser une lettre pour désigner de façon indéterminée un élément de l'ensemble E, supposer que cet élément satisfait la propriété $P[x]$ et démontrer, en utilisant des inférences valides à partir de résultats déjà connus, qu'il satisfait la propriété $Q[x]$. Nous avons décrit ici une démarche pour démontrer une implication universellement quantifiée, démarche devenue extrêmement naturelle pour celles et ceux qui enseignent les mathématiques au lycée ou dans le supérieur, et *a fortiori* pour celles et ceux qui font de la recherche en mathématiques. Cette démarche peut être qualifiée de syntaxique, dans la mesure où elle relie la structure de la preuve à la structure de l'énoncé à démontrer. Elle comporte néanmoins une dimension sémantique dans la mesure où on travaille avec un élément générique d'un ensemble donné. D'autres telles démarches articulant des aspects syntaxique et sémantique nous semblent complètement naturalisées, même si nous ne saurions peut-être pas toutes les décrire de façon aussi simple.

Regardons quelles démarches nous utiliserions pour démontrer un énoncé de la forme $\forall x, \exists h\ (P[x, h] \Rightarrow Q[x])$. La syntaxe d'un tel énoncé est clairement visible, mais ne nous permet pas immédiatement de donner du sens à l'énoncé, comme nous pouvons le constater sur l'exemple suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists h \in \mathbb{R}_+^* \ (|x| < h \Rightarrow x = 0)$$

Le premier pas, introduire une lettre désignant un réel, ne pose en général pas de problème. La pratique courante consiste à reprendre la lettre x, utilisée comme variable quantifiée dans l'énoncé, mais choisir une autre lettre, pratique plus inhabituelle, permettrait de clarifier le statut logique des lettres (Mesnil, 2014). Il reste maintenant à montrer $\exists h \in \mathbb{R}_+^*\ (|x| < h \Rightarrow x = 0)$. Si l'on continue avec notre démarche syntaxique, il faudrait trouver un terme $t > 0$ pour lequel il restera à prouver $|x| < t \Rightarrow x = 0$, ce qui se fera en supposant $|x| < t$ et en démontrant $x = 0$. Il y a alors un malaise créé par le fait que d'une part on a l'impression de devoir déterminer le terme t dont on veut prouver l'existence, et d'autre part on a l'impression contradictoire que pour démontrer l'implication, le terme t n'est pas déterminé puisque l'on ne fait dessus pas d'autre hypothèse que $|x| < t$.

Faisons alors un pas en arrière : plutôt que de démontrer l'implication $|x| < t \Rightarrow x = 0$, cherchons à démontrer sa contraposée : $x \neq 0 \Longrightarrow |x| \geq t$. Le malaise disparaît puisqu'alors l'hypothèse à faire ne concerne plus le terme t.

Nous aurions pu faire plusieurs pas en arrière, et chercher à démontrer que la négation de la proposition est fausse. Or, cette négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}_+^*\ (|x| < h\ et\ x \neq 0)$ dont nous voyons assez facilement qu'elle est effectivement fausse. Une autre manipulation de l'énoncé initial nous aurait permis de le transformer en l'énoncé équivalent $\forall x \in \mathbb{R}\ [(\forall h \in \mathbb{R}_+^*\ |x| < h) \Rightarrow x = 0]$, et nous aurions alors beaucoup plus facilement reconnu une propriété familière. Mais la règle qui permet de « rentrer » le quantificateur est une règle peu connue (et parfois utilisée de façon incorrecte, le quantificateur est rentré sans être changé).

Ce moment de réflexion autour de la proposition $\forall x \in \mathbb{R}, \exists h \in \mathbb{R}_+^*\ (|x| < h \Rightarrow x = 0)$ nous a servi à mettre en lumière principalement trois points que nous développerons par la suite :

- Les démarches syntaxiques que nous pensons maîtriser en tant que praticien·ne·s des mathématiques à un niveau avancé ne sont pas nécessairement naturellement disponibles face à un énoncé dont la structure comporte une implication existentiellement quantifiée, ce qui est en fait quasiment inexistant en mathématiques. On peut sans risque de se tromper faire l'hypothèse que ceci est encore plus souvent le cas pour nos étudiant·e·s qui ont beaucoup moins de pratique et pour lesquel·le·s de nombreuses structures d'énoncés rencontrées en cours de mathématiques en début d'université sont encore peu familières.
- Nous disposons cependant de démarches syntaxiques qui nous permettent de nous ramener à des structures logiquement équivalentes à la structure initiale de l'énoncé mais plus familières,

facilitant ainsi l'engagement dans une preuve. Notons cependant que la manipulation la plus efficace dans le cas de notre exemple est une transformation finalement peu connue.

- Le passage par la négation est une démarche articulant la syntaxe (règles de négation d'une structure complexe) et la sémantique (interprétation de l'énoncé). Ceci permet dans l'exemple présenté de statuer facilement sur sa valeur de vérité. Notons que cet exemple concernait la preuve d'un énoncé conditionnel comportant une double quantification de type « Pour tout Il existe ». D'autres difficultés sont liées aux usages de telles implications pour lesquelles certaines pratiques expertes sont susceptibles de générer des difficultés chez les étudiant·e·s (Durand-Guerrier 2005a, 2005b).

2. Difficultés des étudiant·e·s avec les usages de l'implication

2.A. Quantification universelle implicite d'une implication

Examinons les trois énoncés suivants dans lesquelles la variable n désigne un entier naturel :

1) n est premier et n est impair
2) n est premier ou n est impair
3) n est premier $\Rightarrow$ n est impair

Ils sont construits de façon identique : à partir des énoncés « n est premier » et « n est impair », reliés par un connecteur binaire (et, ou, $\Rightarrow$). Pourtant, en réponse à la question « cet énoncé est-il vrai ou faux ? », nous ne réagissons pas de la même façon pour les deux premiers énoncés et pour le troisième : sauf lorsque l'auditoire auquel on s'adresse est composé principalement de logicien·ne·s, la réponse « c'est faux » fait souvent quasiment l'unanimité pour l'énoncé 3., les réactions pour les énoncés 1. et 2. sont parfois plus variées, mais disent à peu près toutes l'impossibilité de conclure.

La prise en compte de la similitude dans la construction des trois énoncés devrait conduire à proposer la même réponse pour les trois, à savoir : il n'est pas possible de déterminer leur valeur de vérité, ils sont chacun vrais pour certaines valeurs de la variable n, faux pour d'autres. Une telle attitude reviendrait à considérer que l'énoncé 3. est faux pour $n = 2$, mais vrai par exemple pour $n = 3$. Ceci est une façon peu courante de lire une implication (Durand-Guerrier, 2003) : en effet, même absente, nous associons à une implication mettant en jeu des variables une quantification universelle portant sur ces variables, et nous lisons ici « $\forall n \in \mathbb{N}$, n est premier $\Rightarrow$ n est impair ».

2.A.a. Malentendu autour des questions de vérité

Plusieurs expérimentations répétées à différents niveaux et à différentes époques (Adda, 1975 ; Durand-Guerrier, 1999 ; Hache & Forgeoux, 2018) montrent que nos élèves et étudiant·e·s ne partagent pas tous et toutes cette façon de lire les implications non quantifiées, et encore dans le supérieur, certain·e·s peuvent être en difficulté quand un·e enseignant·e affirme la fausseté d'une implication non explicitement quantifiée qui leur paraît pourtant parfois vraie (par exemple « si une suite est croissante, alors elle tend vers plus l'infini » : bien sûr, notre principal problème reste que plusieurs étudiant·e·s pensent qu'elle est tout le temps vraie, mais quelques autres, qui n'ont finalement pas tort, pensent qu'elle est parfois vraie, parfois fausse). De tels énoncés sont dit contingents, et jouent un rôle le plus souvent caché dans l'activité mathématique (Durand-Guerrier 1999 ; Cerclé 2019).

2.A.b. Difficulté à produire la négation

Une autre difficulté liée à cette pratique de la quantification universelle implicite des implications est liée à la formulation de leur négation : il n'est pas rare de donner la définition de la limite finie d'une fonction en un point sans quantifier sur la variable x[1], et peu de celles et ceux à qui nous demanderions d'écrire la négation penseraient alors à quantifier existentiellement cette même variable x. Bien sûr, là encore, une autre difficulté importante serait qu'également peu d'étudiant·e·s, au moins au début de l'enseignement supérieur, savent que la négation de $(A \Rightarrow B)$ est (A et NON(B)). Notons à ce propos, et nous y reviendrons ultérieurement, que par contre, plusieurs sont en mesure d'infirmer une implication, même quantifiée implicitement, en produisant un contre-exemple, c'est-à-dire un élément qui vérifie l'antécédent et pas le conséquent de l'implication.

2.A.c. Preuve avec juste un exemple

Pour terminer avec les difficultés liées à la quantification universelle implicite, et même si nous savons bien qu'expliciter la quantification ne suffit pas pour faire disparaître cette erreur, signalons que nous trouvons encore dans le supérieur des étudiant·e·s qui prouvent une implication en donnant une valeur qui satisfait l'antécédent et le conséquent. Nous ne connaissons pas d'études donnant des statistiques sur cette erreur, mais en nous basant sur nos expériences, il nous semble qu'elle est, pour une même personne, moins systématique que dans le secondaire, c'est-à-dire qu'un·e étudiant·e peut y avoir recours pour la preuve d'une implication qui le met ou la met en difficulté, là où il ou elle pourra produire une preuve correcte dans un contexte plus familier.

2.B. Utiliser/démontrer une implication

À leur arrivée dans l'enseignement supérieur, les étudiant·e·s sont confronté·e·s à la nécessité d'étudier et d'élaborer par eux-mêmes ou par elles-mêmes des raisonnements et des preuves de plus en plus complexes, ce qu'ils et elles ont peu eu l'occasion de faire dans leurs études secondaires, y compris dans les sections scientifiques. Ils et elles ont à démontrer une proposition mathématique, et de plus en plus fréquemment, la tâche demandée se réduit à cela. Bien sûr, pour produire la preuve d'une proposition mathématique, ils et elles auront à utiliser d'autres propositions. Chacun·e se retrouve donc tour à tour dans l'activité mathématique en position d'utilisateur·trice, ou de démonstrateur·trice. Et la manipulation des variables, des connecteurs, des quantificateurs n'est pas la même dans les deux positions. Donnons juste l'exemple de la démonstration de la convergence de la somme de deux suites convergentes : la définition de la convergence doit être démontrée pour la somme, donc on commence par se donner un $\varepsilon > 0$, et on cherche un rang N à partir duquel… La définition de la convergence est utilisée pour les deux suites avec lesquelles est formée la somme : on peut donc ici choisir de l'appliquer pour $\varepsilon/2$, et la définition nous donne des rangs N_1 et N_2 à partir desquels… Se retrouver dans ces deux positions est une des difficultés des élèves qui arrivent dans le supérieur, d'autant plus qu'ils et elles ont été finalement peu en position de démonstrateur·trice dans le secondaire. Bien sûr, certains résultats sont démontrés, mais la structure de la démonstration est rarement à la charge des élèves. En effet, le plus souvent soit la démonstration

[1] Au moins une occurrence d'une définition sans quantification se trouve dans le cours sur Wikiversité : https://fr.wikiversity.org/wiki/Limites_d'une_fonction/Limite_finie_en_un_point, au moins une occurrence d'une définition avec quantification se trouve dans le cours du site Exo 7 : http://exo7.emath.fr/cours/ch_fonctions.pdf

est faite par l'enseignant·e, soit elle est très guidée. Regardons maintenant plus en détail ce qu'il en est pour l'implication.

2.B.a. Difficultés à utiliser une implication

L'utilisation d'une implication peut être décrite par le schéma du *modus ponens* : « de $A \Rightarrow B$ et de A, on peut déduire B ». Cette règle est souvent présentée dès les premières démonstrations au collège, pas sous cette forme, mais les élèves sont parfois invité·e·s à utiliser une structure rigide en « je sais que…, or…, donc… ». M. Gandit (2009) a montré les dangers d'un enseignement qui réduit trop la preuve à un jeu formel qui consisterait à remplir de telles structures. S'il est pertinent d'avoir une approche formelle pour décrire des pas ou des schémas de raisonnement (au sens où elle parle de la forme, l'abstraction des formulations utilisées pour la décrire évoluent bien sûr selon le niveau d'enseignement), rigidifier à ce point le langage et la structure globale d'une démonstration est bien loin des pratiques langagières de la communauté des mathématicien·ne·s (Hache & Mesnil, 2015).

Si l'on reprend les résultats du questionnaire proposé par V. Durand-Guerrier dans sa thèse (Durand-Guerrier, 1996), et décrit dans Durand-Guerrier (2003) très peu d'étudiant·e·s confondent encore implication et équivalence, au sens où ils ou elles utiliseraient systématiquement $A \Rightarrow B$ dans les deux sens : de A pour déduire B, et de B pour déduire A. De telles erreurs n'ont pas complètement disparu, mais les résultats expérimentaux confirment l'hypothèse de l'auteure que ce qui pourrait sembler être une confusion entre les deux notions pourrait dépendre des connaissances du contenu auquel les énoncés se réfèrent dans un contexte donné (Durand-Guerrier, 2003, p. 22).

De même, dans la population étudiée plus des trois quarts des étudiant·e·s mobilisent correctement le *modus ponens*, et également le *modus tollens*, autre façon d'utiliser une implication : « de $A \Rightarrow B$ et de NON B, on peut déduire NON A ». Pourtant, malgré cette réussite sur des tâches de déduction isolées, dans le cadre de l'élaboration d'une preuve « undergraduate students sometimes fail to use or interpret relevant theorems correctly or fail to verify that the conditions of the hypotheses of a theorem are satisfied. »[2] (Selden, 2012, p. 402)

2.B.b. Difficultés à démontrer une implication

La tâche consistant à démontrer une implication universellement quantifiée $\forall x \in E, P[x] \Rightarrow Q[x]$ est assez nouvelle pour les étudiant·e·s du supérieur. Et par ailleurs, elle n'est presque jamais énoncée aussi explicitement. Elle est souvent « cachée » en raison de la formulation utilisée : par exemple, il faut démontrer qu'une fonction est injective, démontrer que des vecteurs sont linéairement indépendants… La difficulté première pour aborder ce type de tâche est de connaître la définition, dont la structure logique est souvent plus complexe qu'une simple implication universellement quantifiée, ou dont les étudiant·e·s ont parfois retenu une formulation informelle (par exemple pour l'injectivité : « deux éléments différents ont des images différentes »). Or, comme le souligne Selden et Selden (1995) les étudiant·e·s ont souvent des difficultés à déplier cette structure logique sous-jacente, ce qui constitue une deuxième difficulté à l'entrée dans la preuve. Par ailleurs, les formulations que nous choisissons dissimulent parfois l'implication. Il est important que les étudiant·e·s sachent comment initier la preuve d'un résultat tel que « le produit de deux matrices

[2] Notre traduction : « les étudiant·e·s [au début du supérieur] échouent parfois à utiliser ou à interpréter correctement les théorèmes pertinents ou à vérifier que les conditions des hypothèses d'un théorème sont satisfaites. »

inversibles est inversible », formulation condensée qui masque et la quantification universelle et l'implication. Néanmoins, il est fréquent que même une première phrase telle que « soient A et B deux matrices inversibles, montrons que le produit AB est inversible » ne vienne pas facilement aux étudiant·e·s au début du supérieur. Dans une autre formulation telle que « quelles que soient les matrices inversibles A et B, le produit AB est inversible », la quantification universelle est explicite, mais l'implication reste masquée par la pratique courante de la quantification bornée[3], qui n'est pas non plus sans poser problème (Durand-Guerrier, 2005a, pp. 91-93). Nous ne suggérons pas de renoncer aux formulations informelles ou condensées, mais plutôt de travailler explicitement avec les étudiant·e·s sur la structure logique sous-jacente et sur son lien avec la structure de la preuve.

3. Références théoriques

Dans cette section, nous présentons deux cadres théoriques permettant de prévoir et d'analyser les difficultés rencontrées par les étudiant·e·s dans les usages des concepts logiques dans le cadre de leur activité mathématique. Le premier se réfère à la triade *syntaxe, sémantique* et *pragmatique* telle que présentée dans Morris (1938). Le second se réfère à la distinction faite par Gérard Vergnaud (2002) entre forme opératoire et forme prédicative de la connaissance.

3.A. Syntaxe, sémantique et pragmatique

Dans son article de 1938, *Foundation of the Theory of signs*, C. Morris définit les trois concepts qui fondent sa théorie de la manière suivante : la sémantique concerne les relations entre les signes et les objets auxquels ces signes réfèrent ; la syntaxe concerne les règles d'intégration des signes dans un système donné et la pragmatique concerne la relation entre les sujets et les signes. Ces définitions sont reprises dans Eco (1988) qui précise ainsi la définition de la pragmatique : le signe est perçu en fonction de ses origines, des effets qu'il a sur ses destinataires, des usages qui en sont faits.

Dans l'activité mathématique, la syntaxe et la sémantique sont étroitement articulées dans la mesure où les objets, leurs propriétés et les relations qu'ils entretiennent entre eux jouent un rôle essentiel, au-delà de la seule manipulation d'énoncés formels et ceci y compris à des niveaux avancés du curriculum. La pragmatique doit en outre également être prise en compte dans l'analyse de l'activité car ce sont des sujets humains qui la pratiquent. Son rôle est particulièrement saillant lorsque l'on se trouve en situation d'enseignement dans la mesure où les relations entre les étudiant·e·s et les signes peuvent différer significativement de celles entre leurs enseignant·e·s et ces mêmes signes. Ceci est en accord avec la position de Newton Da Costa (1997) qui soutient que la prise en compte de ces trois aspects est nécessaire pour une compréhension adéquate des domaines logico-mathématiques.

Nous illustrons dans ce qui suit l'importance de la prise en compte de ces trois aspects dans l'activité mathématique par l'exemple de l'expression « deux à deux » présente dans un certain nombre de définitions mathématiques. Cet exemple nous permet de mettre en lumière comment des ambigüités *sémantiques* dont l'interprétation dépend du contexte mathématique et des connaissances du sujet (aspects *pragmatiques)* peuvent être discutées par la mise en évidence de la structure logique

[3] Etant donnée une implication universellement quantifiée de la forme $\forall x \in E, P[x] \Rightarrow Q[x]$, en quantifiant sur le sous ensemble A de E formé de tous les éléments de l'ensemble qui vérifient l'antécédent de l'implication, on obtient un énoncé de la forme $\forall x \in A, Q[x]$.

sous-jacente aux diverses interprétations (aspects *syntaxiques*). Dans ce cas précis, on a affaire à des relations binaires qui ouvrent plusieurs possibilités de quantifications universelles et/ou existentielles et nécessitent dans certains cas l'explication d'une implication cachée.

Bien que vous ayez peut-être souvent l'occasion d'utiliser l'expression « deux à deux » en mathématiques, vous ne vous êtes pas nécessairement demandé explicitement ce qu'elle signifiait. Le questionnement peut naître si vous vous trouvez en face d'une personne qui interprète cette expression différemment de ce à quoi elle réfère pour vous dans une situation donnée. Prenons un exemple concret (qui s'est effectivement produit) analysé dans Durand-Guerrier et al. (2006). Dans une situation de formation continue pour des professeur·e·s d'écoles sur le thème de la dimension expérimentale en mathématique, les participant·e·s étaient invité·e·s à résoudre le problème suivant : déterminer tous les polyèdres réguliers convexes. La définition qui avait été donnée était la suivante : un polyèdre régulier est un polyèdre (un solide délimité par des faces planes) convexe dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables tels que à tous les sommets corresponde un même nombre de faces.

Les participant·e·s disposaient de matériel permettant de construire des solides (des pièces en plastique pouvant se clipper) qu'ils ou elles pouvaient utiliser s'ils ou si elles le souhaitaient dans la phase d'exploration du problème. Dans la première partie du travail, les membres d'un des groupes ont discuté sur la signification de l'expression « deux à deux superposables » sans réussir à se mettre d'accord ; l'un·e des membres du groupe avait réalisé un tétraèdre et considérait que ce solide, contrairement au cube, ne satisfaisait pas la définition car la disposition spatiale n'était pas respectée. Ce qui était en jeu dans ce débat était l'interprétation qu'il fallait faire de l'expression *deux à deux*. Fallait-il considérer que toutes les faces devaient être identiques, autrement dit « quelle que soit la paire de face que je considère, les deux faces sont superposables » (Interprétation de type 1) ; ou bien devait-on interpréter cette expression comme signifiant « chaque fois que je considère une face, je peux lui en associer une autre qui lui est superposable », avec comme référence pour la signification la définition du parallélogramme (Interprétation de type 2). La deuxième interprétation contient en outre l'idée d'appariement (prendre les faces deux par deux) associée dans ce cas à la prise en compte de la disposition spatiale. Dans le contexte de cette situation, en l'absence de connaissances préalables sur les polyèdres réguliers, les participant·e·s ne disposaient d'aucun moyen pour trancher la question. On était en présence d'une ambiguïté référentielle que nous n'avions pas anticipée et pour clore le débat, nous avons indiqué quelle était l'interprétation correcte dans ce cas. Ce que nous observons ici, c'est une même forme grammaticale (syntaxique) qui donne lieu à deux interprétations (sémantique) différentes possibles *a priori*, selon les objets auxquels on se réfère. Notons que plus généralement, l'interprétation de type 1 correspond aux polyèdres réguliers, tandis que l'interprétation de type 2 pourrait s'appliquer aux polyèdres semi-réguliers comme par exemple l'icosaèdre tronqué[4] formé de vingt hexagones réguliers et de douze pentagones réguliers. S'ajoute ici la dimension pragmatique dans la mesure où l'état des connaissances du sujet intervient pour le choix d'une interprétation : une personne qui connaîtrait déjà la liste des polyèdres réguliers ne rejetterait pas le tétraèdre au motif que la contrainte spatiale attachée à l'expression deux à deux dans la définition du parallélogramme n'est pas respectée.

[4] https://fr.wikipedia.org/wiki/Icosaèdre_tronqué

En mathématique, on cherche d'une manière générale à éviter ce type d'ambiguïté référentielle ; néanmoins, une rapide exploration de différentes définitions classiques en mathématiques données en langage vernaculaire montre que cette expression est utilisée selon l'une ou l'autre interprétation suivant les objets considérés. En voici quelques exemples :

1) Une relation d'ordre sur un ensemble E définit un ordre total si et seulement si les éléments de E sont comparables deux à deux (Type 1)
2) Deux triangles sont semblables si et seulement si leurs angles sont congruents deux à deux (Type 2)
3) Un parallélogramme est un quadrilatère plan dont les côtés sont parallèles deux à deux (Type 2)
4) Une partition d'un ensemble U est un ensemble formé de parties de U deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à U (Type 1)
5) En probabilité, étant donné un entier m, m événements sont deux à deux indépendants si et seulement si pour tout couple d'événements de la famille, la probabilité de leur intersection est égale à la probabilité de leur produit (Type 1)
6) Les racines complexes d'un polynôme à coefficients réels (lorsqu'elles existent) sont conjuguées deux à deux (Type 2)

On pourrait envisager de renoncer à l'interprétation de type 1 au profit de l'interprétation de type 2 en écrivant par exemple « les faces sont toutes superposables ». Cependant, d'une part les exemples ci-dessus montrent que ceci serait peu en accord avec les habitudes en mathématiques, à tout le moins en situation d'enseignement ; d'autre part, dans cette nouvelle formulation, la relation binaire s'est transformée en une propriété qui suppose l'existence d'un objet de référence. Dans le cas de l'exemple des polyèdres réguliers, ceci correspond à l'idée d'une face modèle que l'on reproduit et renvoie donc à une interprétation en accord avec la situation, mais ceci ne serait pas le cas dans l'exemple 1) de définition d'un ordre total. En outre, dans ce dernier cas, on ne voit pas clairement comment engager une preuve, dans la mesure où choisir un élément de référence et montrer qu'il peut être comparé à tout autre élément, ne permet pas dans ce cas de conclure.

De fait l'ambiguïté référentielle de l'expression *deux à deux* révèle une difficulté inhérente aux relations binaires. Etant donné une relation binaire R sur un ensemble E non vide, on peut lui associer plusieurs énoncés comportant au moins une quantification universelle :

1) Pour tout x dans E, pour tout y dans E, $R(x, y)$
2) Pour tout x dans E, il existe y dans E tel que, $R(x, y)$
3) Il existe x dans E tel que pour tout y dans E, $R(x, y)$

La formulation (1) correspond à l'interprétation de type 1 dans le cas d'une relation réflexive, comme être superposable. Pour l'interprétation de type 2 qui comporte l'idée d'appariement, il faut modifier l'énoncé (2) sous la forme :

Pour tout x dans E, il existe y dans E tel que $y \neq x$ et $R(x, y)$ (2')

L'énoncé (3) est une conséquence logique (au sens de Tarski 1936[5]) de l'énoncé (1) sous réserve que l'on travaille avec un ensemble E non vide. Dans l'exemple des polyèdres réguliers, ceci rend compte du fait que dans le cas où l'énoncé (1) est vérifié, on peut choisir un élément arbitraire comme élément de référence. La relation « être superposable » étant une relation d'équivalence sur l'ensemble des faces du polyèdre, ceci revient à choisir un représentant de la classe d'équivalence.

Dans cette analyse, nous avons utilisé deux fois le fait que la relation « être superposable » est une relation d'équivalence sur tout ensemble de figures polygonales. En effet, pour qu'un énoncé tel que (1) corresponde à l'interprétation de type 1, il est nécessaire que la relation soit réflexive. Ce n'est pas le cas dans l'exemple 4) puisque la relation binaire « être disjoints » pour les ensembles n'est pas réflexive (elle est de fait antiréflexive). Par conséquent, pour formaliser l'énoncé, il faut expliciter le fait que l'on exclut les couples de la forme (A, A) qui le mettent en défaut. On est donc amené·e à le modifier sous la forme :

Pour tout x dans E, pour tout y dans E, si $y \neq x$, alors $R(x, y)$ (1')

Notons que dans ce cas, E est l'ensemble formé des éléments de la partition ; comme l'indique le pluriel dans la définition en langue vernaculaire, cet ensemble contient au moins deux éléments.

Ce travail de formalisation des différents énoncés permet de travailler avec les étudiant·e·s différents points importants :

- Certaines expressions en mathématiques peuvent s'interpréter différemment selon les contextes, en particulier selon la nature des objets mathématiques en jeu.
- Le travail de formalisation logique en explicitant les quantifications implicites dans la formulation vernaculaire permet de rendre visible la structure logique et de choisir une interprétation. Ce faisant, il met en évidence le rôle de la nature des objets et de leurs propriétés dans les choix interprétatifs, et donc les liens entre syntaxe et sémantique, ce qui contribue à une conceptualisation adéquate des objets mathématiques en jeu.
- Ce travail d'aller-retour entre énoncé formalisé et énoncé en langue vernaculaire est également l'occasion de travailler sur les différences d'interprétations entre les énoncés de la forme « Pour tout x, il existe y tel que $P(x, y)$ » et « Il existe y tel que pour tout x, $P(x, y)$ » dont on sait qu'ils sont sources de difficultés, (voir par exemple Dubinsky & Yiparaki 2000 ; Durand-Guerrier & Arsac 2005) ; certains étudiant·e·s en début d'université considèrent que ces deux types d'énoncés sont synonymes, autrement dit ils ou elles considèrent que l'ordre des deux quantificateurs n'a pas d'effet sur l'interprétation de ces énoncés (Chellougui, 2009).

D'une manière générale, dans l'analyse des énoncés et des raisonnements, la prise en compte de l'articulation entre les dimensions syntaxique et sémantique fait émerger des interprétations possibles qui doivent être examinées sous l'angle pragmatique, en référence au contexte, à la situation d'énonciation et aux connaissances du sujet. Dans une perspective didactique, cela permet d'une part d'enrichir l'analyse *a priori* des situations proposées, en envisageant en amont les différentes interprétations possibles et les activités permettant de les expliciter et de les discuter. Ceci permet

[5] Dans le point de vue sémantique développé par Tarski, une formule G est une conséquence logique d'une formule F si et seulement si tout modèle de F est un modèle de G.

d'autre part d'interpréter de manière plus fine les productions langagières des étudiant·e·s et de prendre en compte de manière rigoureuse leurs connaissances, ceci en particulier lors des situations d'évaluation (Durand-Guerrier, 2005a, pp.113-116). Comme le souligne Quine (1960), dans une situation d'incompréhension ou de malentendu, une divergence linguistique est plus probable que la stupidité de notre interlocuteur ou interlocutrice ; ceci étant particulièrement important lorsque les étudiant·e·s ne sont pas des locuteur·trice·s natif·ve·s de la langue d'enseignement, ce qui est fréquent à l'université (Durand-Guerrier et al., 2016).

3.B. Connaissance opératoire/connaissance prédicative/ champs conceptuels

Dans la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990), Gérard Vergnaud souligne l'importance des invariants opératoires et de leur articulation avec les connaissances explicites dans le processus de conceptualisation (op. cit. p.145). Les invariants opératoires sont les « concepts-en-acte » et les « théorèmes-en-acte ». Les concepts-en-acte sont des invariants opératoires de type fonction propositionnelle (propriété ou relation) ; ils ne sont pas susceptibles d'être vrais ou faux, mais ils constituent des briques indispensables à la construction des propositions. Par exemple pour un élève de lycée « avoir le même cardinal que » est un concept-en-acte développé depuis l'école primaire dans le cadre des collections discrètes finies. Les théorèmes-en-acte sont des invariants opératoires de type proposition ; ils sont susceptibles d'être vrais ou faux.

Les théorèmes-en-acte permettent de penser le réel et d'agir. Ils se développent dans l'action et sous-tendent les formes invariantes de l'activité :

> « Il n'y a pas d'action possible sans propositions tenues pour vraies sur le réel. Ce sont justement ces propositions tenues pour vraies que j'appelle théorème-en-acte, y compris pour d'autres domaines que les mathématiques. Leur portée est souvent locale (elle l'est toujours dans la phase d'émergence) ; ils peuvent rester implicites : ils peuvent même être faux. » (Vergnaud, 2002, p.25)

Un théorème-en-acte mis en œuvre dès la fin de l'école primaire ou le début du collège est le suivant : si deux collections ont respectivement le même cardinal qu'une troisième collection, alors elles ont le même cardinal. Ce théorème exprime la transitivité du concept-en-acte « avoir le même cardinal que ». Un théorème-en-acte n'a pas besoin d'être formulé pour être utilisé dans l'action. Un observateur ou une observatrice peut faire l'hypothèse qu'il est utilisé par un sujet donné en reconnaissant la mise en œuvre d'une inférence-en-acte[6] : l'élève s'assure que deux collections à comparer ont le même cardinal qu'une collection de référence, et conclut que les deux collections ont le même cardinal.

3.B.a. Théorèmes-en-acte et inférences-en-acte

Un théorème-en-acte est un invariant opératoire ayant un certain *domaine de validité*. En effet, ceci est une condition pour qu'il puisse jouer son rôle d'invariant dans l'organisation de l'activité pour un sujet donné. Il existe donc des domaines d'interprétation dans lesquels un théorème-en-acte donné conduit à une règle d'action valide, même si ce n'est pas un théorème de la théorie mathématique de

[6] Notons qu'une inférence-en-acte peut être associée à un théorème-en-acte de logique ; néanmoins, dans l'activité mathématique, ce sont bien les inférences-en-acte qui sont mobilisées.

référence, ou de la théorie locale considérée, c'est-à-dire même s'il ne découle pas logiquement des axiomes assumés dans cette théorie. Lorsqu'un théorème-en-acte est utilisé en dehors de son domaine de validité, il peut conduire à des décisions d'action, ou à des prévisions erronées. Par exemple, Deloustal-Jorrand (2011, p.60) note que le théorème-en-acte « Lorsque A implique B, A doit être vérifié avant B », qui introduit une notion de temporalité, rentre en conflit avec la reconnaissance que B est une condition nécessaire pour A. Elle a montré dans une expérimentation avec de futurs professeurs du secondaire en France que ceci peut être une source d'erreur dans le maniement de l'implication. Éprouver la limite de validité de l'énoncé peut se faire en classe par la rencontre provoquée avec une interprétation dans laquelle l'utilisation de ce théorème-en-acte est mise en défaut, en particulier parce qu'il fait émerger une contradiction entre les résultats qu'il permet de prévoir et les résultats que l'on peut éprouver expérimentalement.

Un premier exemple permet d'illustrer ce dernier point. Lorsque l'on applique successivement deux fois un énoncé de la forme « Pour tout x, il existe y tel que, $P(x,y)$ » comme dans l'exemple de la somme des suites mentionné en 2.B, la règle de dépendance des variables (Durand-Guerrier & Arsac, 2003, 2005) rend nécessaire d'instancier l'existentiel par deux lettres différentes. Dans de nombreux contextes mathématiques on peut alors établir l'existence d'un élément commun (par exemple si on peut prendre le maximum comme dans l'exemple de la somme des suites). De ce fait, assez rapidement peut s'installer une pratique consistant à ne pas passer par l'utilisation de deux lettres différentes pour aller directement à l'instantiation par une seule lettre, y compris par certains enseignant·e·s, comme dans l'exemple ci-dessous extrait d'un manuel (Houzel, 1996, p.27)[7] :

Théorème : Soient f et g deux fonctions numériques définies dans une partie A de $\mathbb{R}$ et a un élément adhérent à A ; si $f(t)$ et $g(t)$ ont des limites respectives h et k lorsque t tend vers a en restant dans A, alors $f(t) + g(t)$ tend vers la limite $h + k$.

Preuve : Par hypothèse, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $t \in A$ et $| t - a | \leq \eta$ implique $| f(t) - h| \leq \varepsilon$ et $| g(t) - k| \leq \varepsilon$; on a alors

$$|f(t) + g(t) - (h + k) | = | f(t) - h + g(t) - k| \leq | f(t) - h| + | g(t) - k | \leq 2\varepsilon$$

Figure 1 – Un exemple de preuve avec instantiation directe avec une seule lettre.

Ceci correspond à mobiliser dans ce cas l'inférence-en-acte ci-dessous :

« Pour tout x, il existe y tel que $P(x,y)$ et Pour tout x, il existe y tel que $Q(x,y)$, donc Pour tout x, il existe y tel que $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ ».

Cette inférence n'est pas logiquement valide ; elle peut conduire à des preuves erronées dans certains contextes. Cependant, les occasions de la mettre en œuvre en début d'université sont suffisamment nombreuses pour qu'elle puisse s'installer comme une inférence-en-acte, susceptible d'être utilisée en dehors de son domaine de validité.

Pour les expert·e·s d'un domaine donné, les conditions où l'on peut appliquer cette inférence-en-acte sans risque de produire une preuve erronée sont contrôlées par leurs connaissances du domaine (il s'agit donc d'un contrôle sémantique). Pour les novices du domaine, ils ou elles ne disposent pas de ces contrôles, et sont susceptibles d'utiliser cette inférence-en-acte en dehors de son

[7] Cet exemple est analysé en détail dans Durand-Guerrier & Arsac, 2003, pp. 326-328

domaine de validité. Il est donc nécessaire de proposer aux étudiant·e·s des activités leur permettant d'éprouver les limites de ce domaine de validité. On peut le faire par exemple en proposant d'étudier la conjecture ci-dessous[8] :

Conjecture : Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et deux fonctions f et g définies et continues sur l'intervalle fermé $[a\ ;\ b]$, dérivables sur l'intervalle ouvert $]a\ ;\ b[$. Si la dérivée g' de la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]a\ ;\ b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a\ ;\ b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Figure 2 – Énoncé sous forme de conjecture du théorème des accroissements finis généralisé.

Nos observations naturalistes tant en début de licence qu'en formation des enseignant·e·s montrent que de nombreux étudiant·e·s proposent une preuve incorrecte de cette conjecture, en mettant en œuvre l'inférence-en-acte mentionnée ci-dessus. On est ici en présence d'une preuve incorrecte d'un énoncé vrai ; l'erreur doit donc être cherchée dans la preuve. En général, les étudiant·e·s réalisent assez vite que le problème vient de ce qu'ils ou elles ont utilisé la même lettre pour les deux instantiations existentielles, et qu'ils ou elles n'ont pas d'arguments pour justifier ce choix. La production de deux fonctions satisfaisant les conditions du théorème des accroissements finis, pour lesquelles il n'est pas possible de trouver un élément commun à partir des deux éléments instanciés permet de conclure que l'inférence-en-acte ne peut pas être utilisée dans ce cas. Ceci permet d'établir que pour utiliser cette inférence-en-acte dans un contexte donné, il faut s'assurer que l'existence de deux éléments permet d'en produire un troisième, satisfaisant les conditions en jeu. Ceci permet alors de ne pas rejeter catégoriquement son usage, à condition d'avoir dégagé un critère explicite pour déterminer si on peut l'utiliser sans prendre le risque de produire une preuve incorrecte ; ceci ne pouvant se faire qu'après avoir rencontré et discuté ce point au cours de nombreuses situations dans le cadre de l'activité mathématique.

3.B.b. Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance

Dans le prolongement de la notion d'invariant opératoire, Vergnaud (2002) considère les articulations entre la forme opératoire de la connaissance et la forme prédicative de la connaissance :

> « Nous n'avons parcouru qu'une partie du chemin. La suite naturelle du questionnement théorique concerne les relations entre la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance, notamment entre une règle, un théorème-en-acte et un théorème tout court. La complexité n'est pas que dans le faire, elle est aussi dans le dire. L'énonciation des objets et de leurs propriétés est essentielle dans les processus de conceptualisation. Parmi les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des mathématiques, on peut mettre presque à égalité d'une part la complexité des classes de problèmes à résoudre et des opérations de pensée nécessaires pour les traiter, et d'autre part la

[8] Une analyse détaillée de cet exemple se trouve dans Durand-Guerrier & Arsac,2003, pp. 298-300.

complexité de certains énoncés et de certains symbolismes mathématiques » (op. cit. p. 14)

Nous allons illustrer ce qui précède à propos des relations entre « négation d'une implication » et « règle du contre-exemple ».

La négation, comme les autres concepts logico-mathématiques, est l'un des éléments qui cristallise les difficultés de la transition secondaire- supérieur. En effet, ces concepts, malgré un retour des notions de logique dans les programmes du lycée (Mesnil, 2016) restent peu étudiés dans le secondaire et pourtant, ils semblent être considérés comme pratiquement acquis dans le supérieur, où l'on se contente le plus souvent de quelques rappels en début de première année, mettant en outre l'accent presque exclusivement sur les aspects syntaxiques et sur les règles opératoires. On pourrait penser que la pratique mathématique développée dans le secondaire devrait suffire à développer les compétences nécessaires pour les besoins du supérieur, mais les recherches montrent que ce n'est pas le cas.

En logique classique, la négation logique des propositions échange les valeurs de vérité : la négation d'une implication est vraie exactement quand l'implication est fausse et fausse exactement quand l'implication est vraie. Par suite, la négation d'une implication entre propositions « Si A, alors B » est vraie dans un seul cas : A est vrai et B faux ; elle est fausse dans les trois autres cas. Elle est logiquement équivalente la conjonction « A et NON B ». Comme le souligne Da Costa (1997), on peut considérer une extension du concept de négation des propositions pour les phrases ouvertes. La négation d'une implication ouverte entre propriétés « si $P(x)$, alors $Q(x)$ » est satisfaite exactement par les éléments qui ne satisfont pas l'implication ; elle est logiquement équivalente à la conjonction « $P(x)$ ET NON $Q(x)$ ». La négation d'une implication universellement quantifiée est vraie lorsque l'énoncé ouvert a un contre-exemple ; elle est logiquement équivalente à l'énoncé « Il existe x tel que $P(x)$, ET NON $Q(x)$ ». Ce dernier énoncé, qui est une forme prédicative de la connaissance, correspond à la « règle du contre-exemple » qui est une forme opératoire de la connaissance associée. Néanmoins, alors que la règle du contre-exemple est en général bien connue et utilisée à bon escient par la plupart des étudiant·e·s scientifiques en début d'université, un grand nombre d'entre eux ou d'entre elles éprouvent des difficultés à produire la négation d'une implication universellement quantifiée. Des observations de type naturalistes, qui sont toujours d'actualité, avaient conduit la commission Inter Irem Université à proposer une question sur ce point dans le cadre d'une enquête conduite à la rentrée 2006 auprès d'étudiant·e·s arrivant dans le supérieur dans différentes universités et classes préparatoires aux grandes écoles. Le questionnaire portait sur « valeurs absolues – limites – logique ». Nous nous intéressons ici uniquement à l'item portant sur la négation d'une implication[9] :

Donner la négation mathématique de l'énoncé ci-dessous

« Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4 ».

Figure 3 – Item du questionnaire sur la négation d'une implication.

En accord avec les pratiques habituelles dans le secondaire, les auteur·e·s avaient choisi de proposer un énoncé avec une quantification universelle implicite. On peut le reformuler en

[9] Les résultats des items sur la négation ont été présentés en 2008 au congrès ICME11 à Monterrey (Mexique).

introduisant le quantificateur universel, ce qui nécessite également l'introduction d'une lettre de variable :

Pour tout x, si x est un nombre entier divisible par 4, alors x se termine par 4.

La négation est l'énoncé existentiel ci-dessous, qui exprime l'existence d'un contre-exemple :

Il existe un entier x tel que x est un nombre entier divisible par 4 et x ne se termine pas par 4.

L'énoncé universellement quantifié est faux ; il admet des contre-exemples, par exemple 12 ou 16 ; sa négation est un énoncé vrai.

On ne peut pas exclure que pour certain·e·s étudiant·e·s, la quantification universelle ne soit pas prise en compte. Dans ce cas, l'énoncé pourrait être considéré comme n'étant ni vrai, ni faux (il est contingent) car il admet des exemples et des contre-exemples. Certain·e·s pourraient même déclarer que l'énoncé est vrai car il admet des exemples.

Les auteur·e·s de l'étude ont analysé les réponses des étudiant·e·s à cet item dans 340 copies. Une réponse était considérée comme correcte si elle exprimait l'existence d'un contre-exemple à l'énoncé. Pour cet item, 98 étudiant·e·s (29%) ne donnent pas de réponse, ce qui est plus élevé que pour les autres items sur la négation. Seul·e·s 34 étudiant·e·s (10%) donnent une réponse que les auteur·e·s ont considérée comme correcte, à savoir une réponse synonyme de « Il existe au moins un entier divisible par 4 ne se terminant pas 4 ». 155 réponses (45,5%) sont données sous la forme d'une implication avec des positions variées pour la négation comme dans les exemples suivants :

- Si un nombre entier est divisible par 4, alors il ne se termine pas par 4.
- Si un nombre entier n'est pas divisible par 4, alors il ne se termine pas par 4.
- Si un nombre entier est divisible par 4, alors il ne se termine pas forcément par 4.
- Si un nombre entier est divisible par 4, alors il est possible qu'il ne se termine pas par 4.

Cette tendance à donner la négation d'une implication sous la forme d'une implication est très fréquente en début d'université, et ceci bien que, comme nous l'avons dit plus haut, au lycée, les élèves savent qu'il faut produire un contre-exemple pour prouver qu'un énoncé universel est faux. En début d'université, cette règle peut être mobilisée par les étudiant·e·s, et l'avancée dans les études en consolide l'usage.

Cependant, nombres d'étudiant·e·s à des niveaux plus avancés continuent dans certains cas à produire un énoncé conditionnel comme négation d'un énoncé conditionnel. Ceci montre que la mise en relation entre la négation d'une implication universellement quantifiée et la règle du contre-exemple d'un usage courant au lycée n'est pas construite chez de nombreux étudiant·e·s, même à des niveaux avancés. Autrement dit, bien que l'invariant opératoire « règle du contre-exemple » soit mis en œuvre par la plupart des étudiant·e·s scientifiques pour les énoncés conditionnels *(forme opératoire de la connaissance*), la *forme prédicative* associée sur la négation d'une implication universellement quantifiée n'est pas disponible chez de très nombreux étudiants et nombreuses étudiantes. Cet exemple permet d'illustrer les relations étroites entre forme opératoire et forme prédicative de la connaissance.

La forme opératoire « l'implication est fausse car on peut trouver un nombre qui est divisible par 4 et ne se termine pas par 4. » (1)

Forme opératoire disponible

peut se reformuler sous la forme « La négation de l'implication est Il existe au moins un nombre entier divisible par 4 qui ne se termine pas par 4 ». (2)

Forme prédicative non disponible

Pour articuler (1) et (2) il faut savoir :

- que nier une proposition correspond à expliciter la paraphrase « il est faux que ».
Forme opératoire
- Connaître la règle du contre-exemple pour prouver qu'un énoncé général est faux
Forme opératoire
- Connaître les définitions des connecteurs et des quantificateurs logiques
Formes prédicatives

Pour traduire en termes de quantificateurs et de connecteurs logiques la règle du contre-exemple, il faut articuler des connaissances opératoires (règles du contre-exemple) avec des connaissances prédicatives (définition des connecteurs et des quantificateurs). Ceci permet de produire une nouvelle forme prédicative de la connaissance : « La négation d'un énoncé de la forme « Pour tout x dans E, si $A(x)$ alors $B(x)$ » est l'énoncé « il existe x dans E tel que $A(x)$ et non $B(x)$ »

Cette articulation entre forme opératoire et forme prédicative de la connaissance est essentielle pour l'activité scientifique comme le souligne Vergnaud (2007, p. 349)

> « Les inférences utilisées dans l'action, de manière souvent peu explicite, peuvent être analysées dans le langage de la science. Non seulement elles le peuvent, mais elles le doivent, si on ne veut pas laisser s'installer une rupture dommageable entre la forme opératoire de la connaissance et sa forme prédicative. La forme prédicative de la science est évidemment essentielle, justement parce qu'elle est explicite et peut-être partagée, mais une connaissance qui n'est pas opératoire n'est pas véritablement une connaissance. C'est donc un travail essentiel, pour le chercheur, que de formuler dans des termes scientifiques les connaissances utilisées dans l'action, fussent-elles totalement implicites, voire inconscientes. »

4. Exemples d'activités pour travailler sur les difficultés des étudiant·e·s

Dans les parties précédentes, nous avons mis l'accent sur les difficultés rencontrées par les étudiants (section 2) et nous avons proposé deux cadres théoriques permettant de prévoir et d'analyser les difficultés rencontrées par les étudiant·e·s dans les usages des concepts logiques dans le cadre de leur activité mathématique, notamment en lien avec la preuve (section 3). La question de la pertinence d'un enseignement explicite de logique ne fait pas l'unanimité parmi les enseignant·e·s, ni même parmi les chercheur·e·s. Durand-Guerrier et al. (2012) donnent des arguments pour soutenir la pertinence de cet enseignement et écrivent dans leur conclusion :

> « In order to enable students to check the validity of a proof or disproof, or to deal with potential ambiguities in the language used in the mathematical classroom, instructors

> should render explicit the logical aspects of mathematical activity in the classroom, taking into account issues both of context and of language. » (op.cit. p. 366[10])

Nous suivons ces auteur·e·s en proposant des exemples d'activités pour parler explicitement de logique avec les étudiant·e·s. Pour consacrer toute l'attention au concept de logique, certaines de ces activités sont conçues pour ne poser aucune difficulté notionnelle, d'autres au contraire concernent plutôt des notions mathématiques en cours de construction en début d'université. L'expression « parler de logique » est volontairement floue, car il s'agit bien de trouver une position d'équilibre entre une approche trop formelle dont on sait qu'elle n'est pas efficace (El Faqih, 1991), et une approche qui évacuerait les aspects formels dont on sait qu'elle n'est pas non plus efficace (Durand-Guerrier et al. 2012, Durand-Guerrier & Dawkins, 2018).

Notre parti pris est de lister quelques activités explicitement destinées à travailler sur des aspects liés à l'implication, mais également d'illustrer des moments où les connaissances élaborées au cours de ces activités peuvent être réinvesties dans le cours autour d'autres notions. Nous sommes bien sûr conscientes que la maîtrise de connaissances sur l'implication, que ce soient sur l'objet implication, ou sur son usage dans des démonstrations, ou encore sur les pièges du langage des mathématicien·ne·s ne suffit pas pour pallier les difficultés que nos étudiant·e·s rencontrent pour comprendre et produire des preuves, mais ces connaissances nous paraissent nécessaires, et pour compléter sur les difficultés liées à la preuve de façon plus globale, nous renvoyons encore une fois à Selden (2012).

4.A. Parler de la construction des propositions mathématiques, de variables, de connecteurs, de quantificateurs en général, et de l'implication universellement quantifiée en particulier

Les lycéen·ne·s qui arrivent aujourd'hui dans le supérieur ont normalement déjà entendu parler de notions de logique, puisque celles-ci sont revenues dans les programmes du lycée depuis 2009. Ils et elles auront sans doute entendu les termes *proposition, connecteurs, quantificateurs*. Ils et elles auront bien sûr également entendu parler de variables, mais dans un sens plus restreint que celui qu'il peut prendre dans une étude un peu plus poussée du langage mathématique. Ainsi, dans un énoncé tel que « pour toute fonction f dérivable sur un intervalle I, si pour tout $x \in I, f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I », f et I sont tout autant des variables de l'énoncé que x. Nous pouvons donc *a priori* nous appuyer sur quelques connaissances antérieures pour reprendre cette idée que le langage mathématique est construit à partir d'énoncés comportant ou non des variables, et de connecteurs et de quantificateurs qui permettent de construire de nouveaux énoncés à partir d'un ou deux énoncés.

---

[10] Notre traduction : Afin de permettre aux étudiants de vérifier la validité d'une preuve ou d'une réfutation, ou de traiter des ambiguïtés potentielles dans le langage utilisé en classe de mathématiques, les enseignant·e·s devraient expliciter les aspects logiques de l'activité mathématique en classe, en tenant compte à la fois des problèmes de contexte et de la langue.

4.A.a. Activités pour introduire la table de vérité de l'implication

Nous défendons l'idée d'étudier avec les étudiant·e·s la table de vérité de l'implication (mais elle sera d'autant plus facile à comprendre si elle vient à la suite de celles des connecteurs ET et OU, plus faciles pour expliquer ce qu'est une table de vérité). Les deux activités ci-dessous permettent de l'introduire.

1) Déterminer un ensemble de nombres satisfaisant une implication

> Déterminer l'ensemble E des entiers n compris (au sens large) entre 1 et 20 qui satisfont l'énoncé :
>
> « si n est pair alors n +1 est premier »
>
> puis l'ensemble F des entiers n compris (au sens large) entre 1 et 20 qui ne le satisfont pas.

Figure 4 – Activité 1 pour introduire la table de vérité de l'implication

Les réponses proposées sont souvent $E = \{2, 4, 6, 10,12,16,18\}$ et $F = \{8, 14, 20\}$. Quand les entiers impairs sont spontanément placés dans un des deux ensembles, ils le sont plus souvent dans l'ensemble F. Pour celle et ceux qui ne les avaient pas mis, il faut d'abord se mettre d'accord sur le fait que soit ils satisfont l'énoncé, soit ils ne le satisfont pas. Notons que ceci est étroitement lié au fait de choisir de donner une valeur de vérité à l'implication quand l'antécédent est faux. Comme le souligne Durand-Guerrier (2003, p.7) certain·e·s étudiant·e·s peuvent ne pas être convaincu·e·s par ce point, considérant soient que les nombres impairs ne sont pas concernés par l'énoncé, soient que pour les nombres impairs, l'énoncé n'est ni vrai ni faux.

Une fois admis que les nombres impairs satisfont un des deux énoncés, plusieurs arguments peuvent être utilisés pour convaincre que leur place est dans l'ensemble E : admettons que l'implication « si 3 est pair alors 4 est premier » est fausse, alors sa contraposée aussi. Or, sa contraposée est « si 4 n'est pas premier, alors 3 est impair », et même si les étudiant·e·s ont du mal à donner du sens à une implication sans variable, ils et elles sont généralement d'accord pour dire qu'elle est vraie.

Dans le cadre de cette activité, nous pouvons aussi discuter avec les étudiant·e·s sur l'implication quantifiée :

« pour tout entier n compris entre 1 et 20, si n est pair alors n +1 est premier »

et demander ce que serait un contre-exemple qui prouverait qu'elle est fausse. Là aussi, tout le monde sera assez rapidement d'accord pour dire qu'un contre-exemple est un entier pair dont le successeur n'est pas premier.

Finalement, admettre que les entiers impairs satisfont l'énoncé, c'est bien admettre qu'une implication est vraie quand son antécédent est faux.

2) Vérifier si un élément satisfait une implication

On considère trois nombres réels x, y et z tels que :

- L'un des trois nombres réels x, y et z est nul et les deux autres sont de signes contraires
- Les trois implications suivantes sont vraies :
  1) Si $y = 0$ alors $x > 0$
  2) Si $y > 0$ alors $x < 0$
  3) Si $x \neq 0$ alors $z > 0$

Peut-on déterminer le signe des nombres x, y et z à l'aide de ces informations ?

Figure 5 – Activité 2 pour introduire la table de vérité de l'implication

Deux démarches sont courantes pour résoudre cet exercice : faire des essais, en commençant par supposer vrai l'antécédent d'une des trois implications (généralement, les personnes qui résolvent cette tâche commencent par exemple par supposer que $y = 0$. Cette hypothèse mène à une contradiction, donc on doit la rejeter ; il en est de même de l'hypothèse $y > 0$. Par suite, la seule possibilité restante est de faire l'hypothèse $y < 0$ et d'examiner les informations contenues dans l'énoncé 3. L'hypothèse $y < 0 \ et \ x \neq 0$ mène à une contradiction. La seule solution possible est donc $x = 0, y < 0$ et $z > 0$, qui est bien une solution pour laquelle un élément est nul et les deux autres sont non nuls et de signes contraires, et pour laquelle les trois implications sont vraies, … car les trois antécédents sont faux !

Une autre démarche consiste à lister les 6 combinaisons possibles, et à tester chaque implication. Pour réussir avec cette démarche, il est nécessaire de connaître les conditions de vérité d'une implication.

Ces deux activités permettent de motiver le choix théorique que le seul cas où une implication est fausse, c'est quand son antécédent est vrai et que son conséquent est faux, et donc de construire la table de vérité de l'implication. Pour renforcer la pertinence des choix faits pour cette table de vérité, nous pouvons interroger les étudiant·e·s sur la valeur de vérité d'une implication dont tout le monde sera rapidement d'accord qu'elle est vraie, par exemple : « pour tout entier *n*, si *n* est divisible par 4, alors *n* est pair ». Dire que cette implication est vraie pour tout entier *n*, c'est bien dire que les implications « si 6 est divisible par 4, alors 6 est pair » (antécédent faux, conséquent vrai), et « si 7 est divisible par 4, alors 7 est pair » (antécédent faux, conséquent faux) sont vraies. Nous verrons également une autre possibilité de renforcement des choix faits pour cette table dans la partie suivante.

4.A.b. Faire référence à la table de vérité de l'implication

Même en ayant fait ces activités, il arrive encore que certain·e·s étudiant·e·s proposent pour montrer qu'une implication est fausse un élément qui ne vérifie pas l'antécédent (ce que Marc Legrand appelle un « hors-sujet » dans le cadre d'activité de type débat scientifique, Legrand, 1990, p. 141). La table de vérité permet de se rappeler que le seul cas dans lequel une implication est fausse c'est quand l'antécédent est vrai et le conséquent faux.

La table de vérité va aussi nous aider à établir l'équivalence entre $(A \Rightarrow B)$ et $(NON(A)$ OU $B)$, et d'établir que la négation de $(A \Rightarrow B)$ est $(A$ ET NON$(B))$. Ceci est la première étape d'un travail avec les étudiants sur la négation d'une implication universellement quantifiée en lien avec la règle du contre-exemple en appui sur ce que nous avons présenté dans la partie 3.B. Les occasions de travailler ce point sont nombreuses en première année d'université.

Enfin, cette table de vérité va aussi permettre de revenir sur la structure de la démonstration d'une implication : pour démontrer $(A \Rightarrow B)$, la structure usuelle consiste à supposer A et à démontrer B. On ne s'occupe pas du cas où A est fausse, ce qui est justifié par le fait que de toute façon dans ce cas, l'implication $(A \Rightarrow B)$ est vraie, quelle que soit la valeur de vérité de B.

4.B. Décrire les schémas de raisonnement *modus ponens* et *modus tollens*

Dans la section 3.B, nous avons mis en évidence l'importance de l'articulation des formes opératoire et prédicative de la connaissance dans le processus de conceptualisation. Pour ce qui concerne la notion d'implication, nous avons rappelé que les choix faits en logique classique du premier ordre pour la table de vérité de l'implication se heurtent fréquemment à des résistances parmi nos étudiant·e·s. Les deux activités présentées dans la section 4.A visaient à préparer et justifier la définition théorique. Un autre levier pour ancrer le concept d'implication est d'articuler la définition théorique avec les règles d'inférences associées, le *modus ponens* et le *modus tollens,* lesquels en début d'université peuvent être considérés comme des invariants opératoires en raison des usages répétés tant dans le cadre de la classe de mathématiques que dans la plupart des activités humaines. Nous rappelons que bien que le *modus tollens* ne soit pas institutionnalisé en tant que tel dans la classe de mathématiques, il est utilisé en acte y compris par les enseignant·e·s ; en outre, les travaux des psychologues montrent que ce raisonnement est présent en général chez les jeunes enfants dès l'âge de 7 ans (Noveck et al., 1991). Ces deux règles d'inférences gouvernent en quelque sorte le fonctionnement de l'implication, ceci étant lié au fait qu'en creux se dessine l'absence de deux autres règles. Autrement dit l'implication est ce qu'elle est précisément parce que des deux prémisses « $NONA$ » et « A ⇒B », on ne peut rien inférer quant à la vérité ou la fausseté de B et que des deux prémisses « B » et « A ⇒B », on ne peut rien inférer quant à la vérité ou la fausseté de A. C'est ce qui distingue l'implication de l'équivalence (ceci est développé dans Durand-Guerrier (2005a, pp. 52-53)). L'activité que nous présentons ci-dessous vise à travailler et à mettre en débat la reconnaissance des cas où l'inférence est permise et ceux où elle ne l'est pas dans le cas d'énoncés généraux qui se modélisent dans la logique des prédicats et de mettre ceci explicitement en lien avec les choix faits pour la table de vérité de l'implication.

4.B.a. Activité sur les schémas de raisonnement à partir d'une implication vraie.

L'activité *Cosmonautes* que nous allons présenter maintenant est une activité que l'on doit à Marc Legrand et au groupe « Apprentissage du raisonnement » de l'IREM de Grenoble (Legrand, 1983).

Cette activité peut être proposée à différents niveaux (pour un exemple en classe de seconde, voir Murphy et al. (2016).

> Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.
>
> Question 1 : À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge. Est-il cosmonaute américain ? Oui, Non, On ne peut pas savoir.
>
> Question 2 : À côté de lui il y a quelqu'un qui porte une chemise blanche. Est-il cosmonaute américain ? Oui, Non, On ne peut pas savoir.
>
> Question 3 : Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe. Porte-t-il une chemise rouge ? Oui, Non, On ne peut pas savoir.
>
> Question 4 : Dans le hall on voit un cosmonaute américain en manteau. Porte-t-il une chemise rouge ? Oui, Non, On ne peut pas savoir.

Figure 6 – Activité sur les schémas de raisonnement à partir d'une implication vraie.

L'énoncé « Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge » n'est pas formulé sous la forme d'une implication, en raison de l'usage d'une quantification bornée (implicite) ; il peut se reformuler de manière à expliciter la quantification universelle : « Quel que soit le cosmonaute américain, il porte une chemise rouge ». Nous avons déjà vu qu'un tel énoncé peut être reformulé sous la forme d'une implication : « quelle que soit la personne à l'aéroport, si cette personne est un cosmonaute américain, alors elle porte une chemise rouge ». Il s'agit donc ici non pas d'une implication matérielle, mais d'une implication universellement quantifiée. Chacune des quatre questions correspond à un cas de l'implication ouverte associée modélisé par une implication matérielle. Une application du *modus ponens* permet de répondre Oui à la question 4. Une application du *modus tollens* permet de répondre Non à la question 2. Les résultats de Murphy et al. (2016) montrent que ces deux règles sont correctement mises en œuvre par la plupart des élèves de la classe de Seconde où l'expérimentation a été conduite. Par contre, aucune de ces deux règles ne s'appliquant pour les questions 1 et 3, la « bonne » réponse est *On ne peut pas savoir*. Régulièrement, des personnes répondent Oui pour la première question. On peut penser que cela découle d'une application d'un schéma de raisonnement invalide : de (si A alors B) et de B, je déduis A. Mais parfois, quand des explications sont demandées, on s'aperçoit que le contexte « vie courante » de l'exercice amène les élèves à utiliser des prémisses qui ne sont pas présentes, mais qui leur semblent naturelles : par exemple, si on parle de la couleur de la chemise des cosmonautes américains, c'est sans doute que cette couleur sert à repérer la nationalité, et donc même si ce n'est pas explicitement dit, un contrat de communication de la vie courante amène certains élèves à entendre dans cette implication une propriété caractéristique, et donc une équivalence. Évidemment, les deux raisons décrites ici qui conduisent à répondre Oui sont très différentes, car dans un cas il y a bien utilisation d'un schéma de raisonnement invalide, mais dans l'autre cas, le raisonnement est tout-à-fait valide, mais appliqué à des énoncés qui ne sont pas explicitement dans le texte. Comme on l'a vu plus haut dans l'analyse de l'extrait du manuel de Houzel, l'usage d'une inférence *a priori* non valide chez un·e expert·e peut s'expliquer par la mobilisation de prémisses implicites qu'il ou elle sait être satisfaite. Dans le cas qui nous intéresse, il s'agit plutôt d'une incertitude sur la manière d'interpréter la prémisse « Les américains portent tous une chemise rouge ». C'est en explorant une question de recherche de ce type[11] que les résultats présentés dans Durand-Guerrier (2003), déjà évoqués en partie 2.B.a, ont permis de conclure que seul·e·s trois étudiant·e·s dans la population concernée confondaient implication et équivalence. Le questionnaire comportait six énoncés conditionnels dont aucun n'était une équivalence, et les questions portaient sur les inférences permises ou non. L'analyse quantitative a permis de mettre en évidence que les réponses dépendaient des connaissances des sujets, celles-ci ayant un impact sur l'interprétation de la prémisse. Un exemple emblématique est celui du premier item du questionnaire : Prémisse : Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires. Question : Un quadrilatère (A,B,C,D) a ses diagonales perpendiculaires. Est-ce un losange ? Un peu plus de 20% des étudiants ont répondu OUI à cette question semblant mettre en œuvre la règle d'inférence invalide « de (si A alors B) et de B, je déduis A » ; une justification fréquente est alors la suivante : « il y a un seul contre-exemple, le carré ; mais le carré est un losange particulier ». Ceci peut s'interpréter par le fait de se placer dans le domaine des parallélogrammes, prémisse implicite pouvant provenir du fait que les parallélogrammes sont en général les seuls quadrilatères pour lesquels, dans le secondaire, on s'intéresse à l'orthogonalité ou non des diagonales.

L'activité des cosmonautes est bien sûr pensée pour donner lieu à discussions, qui permettront de mettre à jour l'utilisation de prémisses non explicites, et les deux schémas de raisonnement valides que sont le *modus ponens* et le *modus tollens* (on peut utiliser ou non ces deux expressions avec les étudiant·e·s[12]). L'invalidité des deux schémas « de (si A alors B) et de B, je déduis A », et « de (si A alors B) et de NON A, je déduis NON B » peut être montrée avec des théorèmes simples : on sait que « si un entier est un multiple de 4, alors il est pair », mais il ne sera pas difficile de voir que les inférences « 6 est pair donc 6 est un multiple de 4 », ou « 10 n'est pas un multiple de 4 donc 10 n'est pas pair » ne sont pas correctes.

La connaissance de la table de vérité de l'implication peut être réutilisée pour justifier la validité de deux schémas et l'invalidité de deux autres. Par exemple, quand l'antécédent est vrai, l'implication est vraie seulement si le conséquent est vrai, d'où la validité du *modus ponens*. Par contre, quand le conséquent est vrai, l'implication est vraie que l'antécédent soit vrai ou soit faux, d'où l'invalidité du schéma « de (si A alors B) et de B, je déduis A ».

Notons qu'en fait, puisque les implications sont le plus souvent universellement quantifiées, les schémas de raisonnement que nous utilisons le plus souvent combinent en fait une élimination de la quantification universelle et une élimination de l'implication. Par exemple : pour un élément a d'un ensemble E, de « pour tout x de E, si $P(x)$ alors $Q(x)$ » et de $P(a)$, je peux déduire $Q(a)$. Ceci passe implicitement par l'étape d'élimination du quantificateur universel qui produit l'implication matérielle « si $P(a)$, alors $Q(a)$ », qui permet d'appliquer la règle du *modus ponens*.

4.B.b. Mettre en application ces schémas de déduction

Ce n'est évidemment pas difficile de trouver des occasions d'utiliser ces schémas de raisonnement. Mais il se trouve que dans la pratique, nous donnons plus souvent des exemples d'utilisation du *modus* ponens que du *modus tollens*. Nous suggérons qu'à chaque fois qu'un théorème qui est une

[11] How do students answer when they have not enough information or knowledge to decide between true and false for a given sentence in a mathematical field? (Durand-Guerrier, 2003, p.16)

[12] Le faire permet de mentionner le fait que ces deux règles d'inférences sont connues depuis longtemps, elles sont notamment explicitées dans l'Antiquité par les stoïciens sous la forme « Si la premier, la seconde ; or la première ; donc la seconde » et « Si la première, la seconde ; or pas la seconde ; donc pas la première ». (Blanché, 1970)

implication est énoncé, les deux utilisations possibles soient mentionnées. Par exemple, le théorème « toute suite convergente est bornée » permet de dire « la suite u est convergente donc u est bornée », mais aussi « u n'est pas bornée donc u n'est pas convergente ». Le travail devient encore plus intéressant avec des théorèmes plus complexes, comme « pour toute suite u, si u est croissante et majorée, alors u est convergente », qui pourra donner lieu à une inférence telle que « u n'est pas convergente et u est croissante, donc u n'est pas majorée ».

4.B.c. Un exemple d'utilisation coordonnée de schémas valides et invalides

Il est également pertinent dans certains cas de mettre l'accent sur ce que nous apprenons lorsque nous examinons le conséquent d'une implication vraie dans un cas où nous avons peu d'élément pour faire une conjecture sur la valeur de vérité de l'antécédent. En effet, comme le souligne Polya (1954) dans son ouvrage *Le raisonnement plausible*, soit nous pouvons établir que le conséquent est faux, et nous en déduisons que l'antécédent est faux, soit nous pouvons établir que le conséquent est vrai, et dans ce cas, l'antécédent est encore contingent pour le sujet en train de conduire l'étude ; néanmoins, comme le dit Polya, sa vérité est *plus probable* (qu'elle ne l'était auparavant). Autrement dit l'examen de la vérité du conséquent constitue une sorte de test, qui augmente la valeur épistémique de vérité de l'antécédent. On peut alors envisager de chercher à prouver la vérité de l'antécédent. Nous en donnons un exemple ci-dessous.

Considérons par exemple une fonction f de deux variables définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit (a,b) un point de U. On veut savoir si cette fonction est différentiable en (a,b) dans un cas où des théorèmes généraux ne s'appliquent pas. On dispose de la définition et de deux théorèmes :

Définition : f est différentiable en (a,b) si et seulement si il existe une forme linéaire L et une fonction h de limite nulle en (0,0) telle que :

$$f(a+dx, b+dy) = f(a,b) + L(dx,dy) + \|(dx,dy)\| h(dx,dy).$$

Théorème 1 : Toute fonction différentiable en un point est continue en ce point et admet des dérivées partielles en ce point ; en outre, si on note A et B ces dérivées partielles, $L(dx,dy) = Adx + Bdy$.

Théorème 2 : Pour qu'une fonction de deux variables soit différentiable en un point, il suffit qu'elle admette des dérivées partielles continues en ce point.

Compte tenu de ce qu'il est souvent assez coûteux d'établir la différentiabilité en un point en utilisant la définition, on peut s'engager dans l'étude en examinant les valeurs de vérité des conséquents du théorème 1 qui donne une condition suffisante sous la forme d'une conjonction de trois propriétés. On peut commencer par étudier la continuité de f au point (a, b) ; dans le cas où f n'est pas continue en (a, b), on peut conclure que f n'est pas différentiable en (a, b) (application du *modus tollens*). Dans le cas où f est continue en (a, b), l'énoncé antécédent est encore contingent pour le sujet ; il faut donc poursuivre l'étude en étudiant l'existence des dérivées partielles ; à nouveau dans le cas où la réponse est non pour l'une ou l'autre des dérivées partielles, on peut conclure que f n'est pas différentiable ; dans le cas contraire, où les deux dérivées partielles existent, on étudie la continuité des dérivées partielles. Dans le cas où les dérivées partielles sont continues, on peut conclure par un *modus ponens* en utilisant le théorème 2 que la fonction est différentiable en (a,b). Sinon, il faut revenir à la définition pour étudier la limite de la fonction h, et selon les cas conclure ou non sur la différentiabilité de f en (a, b). On peut proposer un algorithme pour décrire cette procédure (cf. Durand-Guerrier,1995, p.233). Naturellement, dans le cas où la fonction est différentiable, on n'a pas vraiment allégé le travail, mais on ne l'a pas alourdi non plus. C'est plutôt dans le cas où la fonction n'est pas différentiable que cette manière de procéder peut alléger le travail. On peut faire l'hypothèse que c'est ce que font les enseignant·e·s dans de tels cas ; néanmoins, si ceci n'est pas explicité, il est possible, voire vraisemblable, que les étudiant·e·s ne pourront pas s'emparer de la procédure. Comme le souligne Rogalski (2012), peu d'études ont été conduites sur le rôle des apports d'un discours explicite par les enseignant·e·s universitaires sur les démarches des étudiant·e·s en mathématiques. Nous faisons néanmoins l'hypothèse que ceci contribue à enrichir la compréhension par les étudiant·e·s de la nature de l'activité mathématique, au-delà de la maîtrise des techniques opératoires.

5. Conclusion

Dans ce texte, nous avons souhaité partager avec les lecteurs des outils méthodologiques et conceptuels pour penser les questions de logique qui se posent dans le cours ordinaire de la classe aux enseignant·e·s universitaires de mathématiques, universitaires étant compris ici au sens large qu'il a dans la littérature internationale.

En nous appuyant sur nos activités complémentaires de chercheures, d'enseignantes et de formatrices en mathématiques et en didactique des mathématiques, nous avons mis l'accent sur des pistes possibles pour améliorer l'usage de l'implication en début d'université. Nous avons pris en compte le fait que les difficultés des étudiant·e·s tiennent pour partie à des difficultés intrinsèques de l'articulation entre logique et raisonnement mathématique, qu'il est nécessaire de traiter explicitement, puisque en effet, tant les résultats de recherche que les expériences partagées de nombreux enseignant·e·s montrent que ces difficultés peuvent persister même chez des étudiant·e·s en réussite en mathématiques.

Pour cela, nous avons tout d'abord souhaité sensibiliser les lecteurs et lectrices à des phénomènes didactiques souvent inaperçus, ceci appelant à une vigilance épistémologique (Artigue, 1991) pour d'une part questionner nos pratiques en position d'enseignant·e·s et expliciter certaines des démarches expertes qui orientent les mathématicien·ne·s en situation de résolution de problème.

Nous avons ensuite proposé des activités faciles à insérer dans le cours ordinaire de la classe de mathématiques, et pour la plupart étroitement articulées à l'activité mathématique elle-même. Nous avons choisi de ne pas développer dans ce texte d'autres pistes explorées de manière féconde dans le cadre des situations de recherche pour la classe et pour la formation des enseignant·e·s notamment au sein de la Fédération de Recherche Math à Modeler[13] (Grenier et al., 2018 ; Deloustal-Jorrand, 2011). Nous considérons que ces deux approches sont complémentaires. Nous n'avons pas non plus abordé dans ce texte la question des apports potentiels de l'informatique et notamment des assistants de preuve pour l'enseignement et l'apprentissage de la logique. Des travaux sur ce thème sont en cours (voir par exemple Chellougui et al. (2021)).

Enfin, nous avons souligné à plusieurs reprises dans le texte que certains des phénomènes mentionnés sont amplifiés pour des étudiant·e·s dont la langue d'instruction n'est pas la langue

[13] https://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/

maternelle. Ces questions sont discutées à l'international, depuis longtemps (Durand-Guerrier et al. 2016), et plus récemment en France et dans l'espace mathématique francophone. Dans Barrier et al. (2019) nous avons montré la pertinence de l'analyse logique pour les études didactiques en mathématiques. Ceci nous permet de penser que l'analyse logique peut jouer un rôle de clarification de la signification des énoncés lorsque deux langues sont en interactions en situation d'enseignement, soit parce que l'enseignement se fait en contexte plurilingue, soit parce que les étudiant·e·s travaillent dans des manuels écrits dans une langue autre que la langue d'instruction, ce qui est fréquent en mathématiques.

Références

Adda, J. (1975). L'importance des quantifications dans la compréhension des mathématiques. *Nico*.

Artigue, M. (1991). Epistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10/2.3*, 241-285.

Barrier, T., Durand-Guerrier, V., & Mesnil, Z. (2019). L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématiques. *Éducation & didactique*, *13-1*, 61-81. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.3793

Blanché, R. (1970). *La logique et son histoire d'Aristote à Russell*. Armand Colin. https://doi.org/10.2307/2273200

Chellougui, F. (2009). L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université entre l'explicite et l'implicite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *29/2*, 115-154.

Chellougui, F., Durand-Guerrier, V., & Meyer, A. (2021). Discrete mathematics, computer sciences, logic, proof and their relationships. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, E. Nardi & C. Winsløw (Eds.) *Research and Development in University Mathematics Education. Overview Produced by the International Network for Didactic Reserach in University Mathematics.* (pp.125-146), ERME Series. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780429346859

Cerclé, V. (2019). Faire vivre les énoncés contingents dans la classe de mathématiques : pourquoi et comment ? *Petit x*, *110-111*, 27-55. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/petit-x-110-111-art2_1612363004720-pdf

Da Costa, N.C.A. (1997). *Logiques classiques et non classiques : essai sur les fondements de la logique*. Paris : Masson.

Deloustal-Jorrand, V. (2011) Des preuves écrites en géométrie pour travailler le concept mathématique d'implication en formation des professeurs. In A. Kuzniak & M. Sokhna M (Eds.) *Revue Internationale Francophone. Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone. Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation*, 58-75. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00990708/document

Dubinsky, E., & Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. *Research in Collegiate Mathematics IV*, 239–289. http://www.math.kent.edu/~edd/OlgaPaper.pdf

Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Thèse de l'Université Lyon 1.

Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x, 50*, 57-79. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR99258/IGR99258.pdf

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *53*, 5-34. https://doi.org/10.1023/A:1024661004375

Durand-Guerrier, V. (2005a). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique*. Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger les Recherches, Université Lyon 1. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00201626/document

Durand-Guerrier, V. (2005b). Questions de logique dans l'enseignement supérieur. Quelques pistes pour faire évoluer les pratiques enseignantes. In *Actes du colloque Questions de pédagogie dans l'enseignement supérieur*. (pp. 362-368). Lille, 2005. http://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/VDG-Lille2005.pdf

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 23/3,* 295-342.

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2005). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *Educational Studies in Mathematics*, *60/2*, 149-172. https://doi.org/10.1007/s10649-005-5614-y

Durand-Guerrier, V., Dias, T., & Ben Kilani, I. (2006). Plurilinguisme et apprentissage des mathématiques. Ambiguités référentielles ; négation et quantification. *Les langues modernes, 3*, 75-83.

Durand-Guerrier, V., Kazima, M., Libbrecht, P.J., Njomgang Ngansop, J., Salekhova, L., Tuktamyshov, N., & Winslow, C. (2016). Challenges and Opportunities for Second Language Learners in Undergraduate Mathematics. In R. Barwell,, P. Clarkson, A. Halai, M. Kazima, J. Moschkovich, N. Planas, M. Phakeng, P. Valero & M. Villavicencio Ubillús (Eds.), *Mathematics Education and Language Diversity, The 21st ICMI Study*, (pp.85-101). https://library.oapen.org/bitstream/handle/20.500.12657/48204/9783319145112.pdf?sequence=1#page=101

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S., & Tanguay, D. (2012) Examining the Role of Logic in Teaching Proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds), *ICMI Study 19 Book: Proof and Proving in Mathematics Education*, chap. 16 (pp. 369-389). Springer, New-York. https://library.oapen.org/bitstream/handle/20.500.12657/48201/9789400721296.pdf?sequence=1#page=367

Durand-Guerrier, V., & Dawkins, P. (2018). Logic in University Mathematics Education. Lerman S. *Encyclopedia of Mathematics Education*. New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100024

Eco, U. (1988). *Le signe*. Editions Labor.

El Faqih, E. M. (1991). *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants du premier cycle scientifique.* Thèse de doctorat. Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Gandit, M. (2009). Il est urgent de repenser l'enseignement de la preuve. In A. Kuzniak & M. Sokhna (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation. Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone* (pp. 425-436).

Grenier, D., Bacher, R., Barbe, H., Beffara, E., Bica¨s, Y. Charlot, G., Decauwert, M., Deraux, M. Gezer, T., Meilhan, J.B., Mouton, F., & Fabert, C. (2018) *Situations de recherche pour la classe pour le collège, le lycée et au-delà*. Groupe Logique, raisonnement et SIRC de l'IREM de Grenoble. IREM de Grenoble.

Hache C., & Forgeoux, E. (2018). Vrai ou faux ? Parlons-en ! *Au Fil des Maths, 528,* 49-54. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02292639/document

Hache, C., & Mesnil, Z. (2015). Pratiques Langagières et preuves. In *Actes du 22e colloque de la CORFEM*, Nîmes, juin 2015. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01285116/document

Houzel C. (1996). *Analyse mathématique. Cours et exercices.* Belin.

Legrand, M. (1983). Les cosmonautes. Compte rendu d'une recherche du groupe « apprentissage du raisonnement » de l'IREM de Grenoble. *Petit x, 1*, 57-73. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR83004/IGR83004.pdf

Legrand, M. (1990). « Circuit » ou les règles du débat mathématiques. In Commission Inter-IREM Université, *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année*.

Mesnil, Z. (2014) Logique et langage dans la classe de mathématiques et la formation. *Actes du 21ème colloque de la CORFEM*, Grenoble, juin 2014. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01570177/document

Mesnil, Z. (2016). Un retour de notions de logique dans les programmes de mathématiques pour le lycée : un nouveau savoir à enseigner. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 21*, 235-266

Morris, C. (1938). *Foundation of the Theory of signs*. Chicago University Press. https://pure.mpg.de/rest/items/item_2364493/component/file_2364492/content

Murphy, C., Weima, S., & Durand-Guerrier, V. (2016). Des activités pour favoriser l'apprentissage de la logique en classe de seconde. *Petit x, 100*, 7-32. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR16002/IGR16002.pdf

Noveck, I.A., Lea, R.B., Davidson, G.M., & O'Brien, D.P. (1991). Human reasoning is both logical and pragmatic. *Intellectica 11*, 81–109. https://doi.org/10.3406/intel.1991.1379

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning (Volume 1, Induction and Analogy in Mathematics; Volume 2, Patterns of Plausible Inference).* Princeton University Press. Traduction Française : Polya (1958)

Polya, G. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement "plausible"*. Gauthier-Villars.

Quine, W.V.O. (1960). *Word and Object*. MIT press. Traduction française Flammarion 1978, 1999.

Rogalski, M. (2012). Aproches épistémologique et didactique de l'activité de formalisation en mathématiques. In J.-L. Dorier, & S. Coutat (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21ᵉ siècle*. (pp. 504–513) Actes du colloque EMF2012. http://emf.unige.ch/files/8814/5320/2324/EMF2012GT3ROGALSKI.pdf

Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at the tertiary level. In G. Hanna, & M. De Villiers (Eds) *Proof and proving in mathematics Education : the 19th ICMI Study*. (pp.391-420). Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_17

Selden, A., & Selden, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(2), 123-151. https://doi.org/10.1007/BF01274210

Tarski, A. (1936). *Sur le concept de conséquence logique*. Traduction française. Granger, G.G. (1972) Sémantique et Métamathématique, 1, 141–152. Armand Colin.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10/*2.3,135-170.

Vergnaud, G. (2002). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance, in Portugais, in Jean Portugais (Ed), *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation.* (pp.6-27) Actes du colloque GDM 2021.

Vergnaud, G. (2007). Réponse de Gérard Vergnaud. In M. Merri (Ed.) *2007 Activité humaine et conceptualisation. Questions à Gérard Vergnaud*. (pp. 341-357). Presses universitaires du Midi.

Viviane Durand-Guerrier
Université de Montpellier
IMAG, CNRS - UM
Montpellier (France)
e-mail : viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Zoé Mesnil
Université Paris Cité
LDAR, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN
Paris (France)
e-mail : zoe.mesnil@u-paris.fr