ÉpiDEMES – (2022), — soumis 01/06/2021, accepté juin 2022, révisé 30/06/2022

Situations de recherche pour l'accès aux concepts mathématiques à l'entrée à l'université

Isabelle Bloch et Patrick Gibel

Abstract. This article presents a device which is organised in the University of Pau and aims to help first year students to overcome their difficulties and adapt themselves to mathematics of this level. They are invited to become involved in the research of mathematical problems. We present two of these situations and analyse students' productions. These productions show clearly that they have reasoning difficulties and do not master the specific concepts of Calculus in this transition Secondary/University. The device helps students to question the meaning of concepts and then, to fit into the logic of University mathematics.

Key-words. Presentation of Research Situations at University level, mathematical concepts, semiotic tools, availability of mathematical knowledge and signs.

Résumé. Cet article présente un dispositif mis en place à l'université de Pau afin d'aider les étudiants de Licence 1 à surmonter les difficultés d'adaptation aux mathématiques du niveau supérieur, et à s'impliquer dans la recherche de problèmes mathématiques. Nous détaillons deux des situations, et les productions des étudiants de l'une d'elles sont analysées. Leurs réponses mettent en évidence leurs problèmes de raisonnement et leurs défauts de maîtrise des concepts mathématiques sur les sujets spécifiques de l'Analyse dans cette transition secondaire/supérieur. Le dispositif aide à questionner le sens des concepts et donc à s'insérer dans la logique mathématique de niveau supérieur.

Mots-clés. Présentation de situations de recherche à l'Université, concepts mathématiques, outils sémiotiques, disponibilité des savoirs et des signes.

Remerciements

Nous remercions Jean-Matthieu Etancelin, Jean-François Falliero, Laurent Levi, Yves Richard, Guy Vallet, mathématiciens à l'UPPA pour leur participation active et motivée à ce dispositif, leur collaboration lors des réunions et des groupes de travaux dirigés ainsi que lors des nombreux échanges relatifs à la mise en œuvre, l'analyse et l'évolution du dispositif

1. INTRODUCTION

La volonté politique de l'UPPA[1] d'expérimenter des dispositifs innovants pour lutter contre l'échec en première année de Licence (L1) de mathématiques et de licence MIASHS[2] a conduit des enseignants intervenant en L1 et les didacticiens de l'INSPE[3] d'Aquitaine à se concerter pour élaborer la mise en œuvre d'un « projet pédagogique innovant ». Ceci a été rendu possible grâce aux interactions engagées depuis plusieurs années entre l'INSPE (site de Pau) et le département mathématique[4] de l'université, dans le cadre des soutenances de mémoires liés à l'enseignement des mathématiques (Master MEEF) et au co-encadrement de thèses en didactique des mathématiques. Ces échanges ont contribué à expliciter les principaux enjeux du champ de la didactique des

[1] Université de Pau et des Pays de l'Adour
[2] MIASHS : Mathématiques et Informatique appliquées aux Sciences Humaines et Sociales
[3] INSPE : Institut National Supérieur du Professorat et de l'Education
[4] Sa dénomination actuelle est collège STEE, collège sciences et technologies pour l'énergie et l'environnement

mathématiques et à montrer l'efficacité des concepts de didactique pour questionner et étudier les problématiques liées à l'enseignement des mathématiques dans le secondaire et le supérieur. Ces interactions ont conduit certains collègues de mathématiques de l'UPPA à vouloir diversifier leurs méthodes d'enseignement, suite au constat du manque manifeste d'investissement des étudiants de L1 dans l'étude approfondie des cours dispensés en CM[5] et dans la recherche des activités proposées en amont des séances deTD[6], et donc de leur échec fréquent. Un objectif de ce dispositif est donc de diminuer le nombre trop important d'abandons de ce cursus universitaire.

Dans cet article, nous présentons le dispositif élaboré puis mis en œuvre en première année de Licence de 2018 à 2021, puis examinons deux situations de recherche proposées aux étudiants. Par situations de recherche, nous entendons des problèmes posés impliquant une mise en œuvre de savoirs déjà étudiés au secondaire, mais conduisant à des savoirs nouveaux ou à une formalisation des savoirs anciens. L'une des principales finalités de ce dispositif est que les étudiants acquièrent plus d'autonomie dans la résolution de ces problèmes, en devant eux-mêmes choisir les outils mathématiques adaptés. C'est ce qu'on appelle des *situations à dimension adidactique* (Mercier, 1995), (Bloch, 1999) : elles comportent une dimension de recherche de problème dévolue aux étudiants, et mobilisant leurs savoirs anciens.

Les situations proposées ont donc permis de mettre à jour les difficultés conceptuelles de ces étudiants, et de leur faire travailler la nature des objets mathématiques ainsi que les raisonnements nécessaires pour résoudre le problème posé. Les productions des étudiants nous permettent d'analyser leurs difficultés à maitriser les raisonnements : au secondaire, l'autonomie à utiliser les théorèmes enseignés n'est que peu travaillée, et les démonstrations sont souvent prescrites étape par étape. Ce fonctionnement induit chez ces étudiants un manque de confiance et un blocage à faire des choix de raisonnement, notamment par déduction.

Par ailleurs, les programmes du secondaire n'indiquent pas que les concepts mathématiques de l'Analyse (nombres réels, suites et fonctions, limites, dérivées, intégrales…) doivent être introduits comme des outils permettant de résoudre des situations mathématiques ; de plus le sens de ces concepts dans la construction d'une théorie de l'Analyse n'est pas toujours explicité en cours de mathématiques. Ceci conduit à des défauts dans l'interprétation des propriétés – notamment un manque de lien entre les propriétés numériques et les concepts d'Analyse, comme le décrit par exemple A. Bergé (2016) : interrogés sur l'utilité de la notion de borne supérieure, beaucoup d'étudiants ne voient pas le rapport avec le concept de limite. De fait, jusqu'en 2019, les propriétés de $\mathbb{R}$ n'étaient plus étudiées au secondaire, et la nature des nombres réels constituait un point aveugle des notions d'Analyse. Encore aujourd'hui, le lien par exemple entre suite et fonction n'est pas clair ; le programme de Première n'apporte pas d'explication sur le calcul de la fonction dérivée et le fait que la valeur de la dérivée en un point représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe.

Cet état de fait produit des difficultés qui deviennent manifestes à l'entrée à l'université, à un niveau où les concepts de base sont assez évidents pour les enseignants, mais où les étudiants entrants risquent d'être désorientés. C'est ce qui nous a conduits à élaborer une UE (Unité d'Enseignement) spécifique conjointement avec nos collègues de mathématiques du collège STEE de l'UPPA, afin

[5] CM : cours magistraux
[6] TD : séances de travaux dirigés

d’aider ces étudiants à mieux comprendre et maîtriser les exigences nouvelles du niveau L1. Nous présentons le projet et ses fonctionnalités, puis donnons deux exemples de situations proposées dans le dispositif. Le plan de l’article est donc le suivant :

- Présentation du projet et des raisons de sa mise en œuvre
- Caractéristiques des situations, analyse *a priori* et objectifs du travail des étudiants
- Analyse des difficultés des étudiants
- Expérimentation, production des étudiants et résultats
- Synthèse et conclusion.

2. CARACTERISATION DU DISPOSITIF PEDAGOGIQUE

2.A. L'élaboration du projet

Le souhait des enseignants de l’UPPA était donc de mettre en place un dispositif pédagogique spécifique ciblant les difficultés des étudiants et visant à augmenter leur compréhension des savoirs mathématiques en jeu, en vue de permettre une plus grande responsabilisation de ces étudiants de L1 et de favoriser leur implication dans les activités de résolution de problèmes, notamment en les faisant travailler en groupes. La volonté de privilégier les échanges au sein de groupes d’étudiants et de permettre des travaux en trinômes a reposé sur une méthode : il a été décidé d'aménager un effectif réduit pour chacun des groupes, soit 24 étudiants. Puis ont été constitués huit trinômes d’étudiants par groupe afin que les enseignants et les didacticiens présents puissent suivre, accompagner et encadrer les travaux engagés par chacun des trinômes, et prendre en considération les principales difficultés rencontrées. Les étudiants ont été laissés libres de constituer leur trinôme, notamment par affinité.

A l’issue d’une phase de recherche du problème posé (où les étudiants en groupe de TD sont initialement accompagnés par les enseignants présents puis prolongent leur recherche de façon autonome), un trinôme[7] présente sa solution au groupe-classe, répond ensuite aux questions du jury composé de trois autres étudiants. Puis un autre trinôme est chargé de rédiger la solution présentée ; cette dernière est évaluée et commentée par l’enseignant et conduit, si l’enseignant le juge nécessaire, à une réécriture de la solution ; la rédaction finale sera ensuite diffusée à l’ensemble du groupe. A chaque étape, les étudiants ont la possibilité de faire appel à l’enseignant – en présentiel ou par mail – pour obtenir des réponses à leurs questions.

Ce dispositif est assez élaboré – et donc il demande d’être exposé en détail aux étudiants en début d’année, mais il doit leur permettre d’entrer accompagnés dans les « mathématiques du supérieur », et de surmonter leurs difficultés. Dans le paragraphe suivant, nous proposons un bilan de ces difficultés, lesquelles ont été documentées depuis plusieurs années – voir par exemple Artigue (2016).

[7] Tiré au sort par l’enseignant

2.B. Etude didactique de situations mathématiques

Le but du projet est donc de motiver et responsabiliser chaque trinôme d'étudiants, en leur dévoluant une situation mathématique proche d'une situation adidactique ou à dimension adidactique au sens de la théorie des situations didactiques, c'est-à-dire une situation comportant une dimension de recherche. Les situations présentées ont pour but de faire approfondir les connaissances présentées notamment durant les CM et les TD classiques dispensés en L1.

Rappelons qu'une situation à dimension adidactique est en quelque sorte un problème ouvert – donc sollicitant la recherche autonome de solution par les étudiants – mais visant un savoir particulier, par exemple le concept de fonction associée à une variable et la différence entre fonction et graphique (situation 1), la maîtrise de la définition de limite d'une suite ou d'une série (situation 2).

Ces situations sont documentées dans les recherches sur la TSD (Théorie des Situations Didactiques) dans l'enseignement secondaire et supérieur : voir par exemple Bloch & Gibel, 2011 ; Benitez & Drouhard, 2015 ; Bergé, 2016. Elles comportent une phase de recherche de la solution du problème (milieu heuristique), puis une étape d'exposé de ces solutions et d'interaction avec les étudiants et le professeur (milieu de formulation) et enfin une synthèse (institutionnalisation des savoirs) effectuée par le professeur, mais en se basant sur les productions des étudiants. Les raisonnements produits sont aussi analysés ; pour approfondir cette approche, on peut consulter Bloch & Gibel (2011) et Gibel (2018 et 2020).

Nous précisons maintenant quelles sont les difficultés qu'éprouvent les étudiants à surmonter le décalage entre les mathématiques du secondaire et du supérieur.

2.C. Nature des difficultés des étudiants constatées en L1

2.C.a. Connaissances mathématiques du secondaire versus supérieur

Le décalage de connaissances et de pratiques mathématiques observé lors de la transition secondaire/supérieur s'avère particulièrement difficile à gérer pour les étudiants ; en effet, le contrat didactique évolue, conduisant les étudiants à une plus grande responsabilisation liée aux choix :

- des connaissances et des savoirs qu'il convient de mobiliser pour répondre à la situation de recherche dévolue par l'enseignant ;
- du cadre (numérique, géométrique, algébrique, graphique…) qui est le plus adéquat pour répondre à la question posée ;
- du mode de raisonnement qu'il faut mobiliser (inductif, déductif, abductif[8]) et de la forme de raisonnement associée : raisonnement par l'absurde, raisonnement par récurrence, raisonnement « direct » ou par contraposée pour élaborer la solution ; il faut également maîtriser les implications et équivalences, en étant conscient des démonstrations à faire ;
- de l'interprétation et de l'usage des signes mathématiques (Bloch et Gibel, 2019), signes dont le niveau de complexité est levé, par exemple les quantificateurs : ceux-ci sont très peu utilisés au secondaire sauf dans des formulations langagières, basées le plus souvent sur des écritures

[8] Un raisonnement abductif consiste à mettre en relation une question posée avec une situation antérieure mobilisant une connaissance, et donc à adopter intuitivement la procédure précédemment utilisée pour tenter de résoudre le problème posé (Everaert-Desmedt, 1990), voir également Lalaude-Labayle (2019) ainsi que le tableau des raisonnements présentés en Annexe 3 extrait de Bloch et Gibel (2011).

littérales précisément jusqu'en Terminale ; en conséquence les étudiants ne maîtrisent pas leur usage, et - comme nous l'avons fréquemment observé - sont très souvent en difficulté lorsqu'ils doivent les relier au type de raisonnement requis.

Les nombreuses études menées en didactique sur la transition secondaire-supérieur mettent en évidence un attendu spécifique en L1, à savoir une pratique maîtrisée du raisonnement au travers de ses différentes fonctions (Bloch et Gibel, 2016 ; Kidron & Tall, 2015 ; Pedemonte, 2007 ; Grenier-Boley et al., 2012 ; Borji & Martínez-Planell, 2019). Parmi les attendus du raisonnement on peut citer Gibel (2018) : organiser sa recherche, chercher, décider des savoirs à mobiliser, décider de la nature du raisonnement à utiliser pour conjecturer, expliquer, justifier, prouver, démontrer, valider, invalider, réfuter.

Les précédentes recherches en didactique montrent des déficiences importantes des étudiants dans la prise d'initiative quant aux connaissances et savoirs à mobiliser pour résoudre un problème et élaborer une procédure de résolution. Au lycée, les connaissances mobilisées dans le cadre des activités de résolution de problèmes sont le plus souvent en lien direct avec la notion mathématique étudiée précédemment, et ne nécessitent que la mise en œuvre de procédures enseignées et répertoriées directement lors du cours sur la notion étudiée, voire explicitement indiquées dans l'énoncé du problème. Il en est de même dans l'épreuve du baccalauréat. De plus, jusqu'à une période récente, les signes utilisés relèvent peu du formalisme mathématique. Le nouveau programme de 2019 a modifié cet état de fait peu propice à la transition secondaire/supérieur, en instaurant un usage des signes comme les quantificateurs dans la définition des limites en Terminale, par exemple. Cependant, même si l'un de ses objectifs est d'initier les élèves à la démonstration, le programme de la classe de Première stipule encore que les suites ne seront introduites que de façon algébrique.

A l'université, les étudiants doivent être capables d'élaborer, puis de rédiger et communiquer une preuve mathématique de façon autonome en articulant les dimensions sémantiques et syntaxiques, mais également de débattre de la validité et de la pertinence d'une preuve complète, ceci en intégrant un niveau de justification adéquat, et des outils comme les quantificateurs : il y a donc un basculement du contrat didactique. Le décalage entre les deux niveaux a été largement illustré dans la recherche, par exemple dans Bloch (2016, p.70) :

> (…) ce décalage fait que les étudiants ne savent manipuler que des fonctions définies par une formule algébrique, et […] ne prennent que peu en compte le fait que l'étude des fonctions implique des calculs et raisonnements à différents niveaux, soit ponctuel, global, local, ce dernier point de vue étant celui qui se trouve le moins investi. Le global n'est pas non plus bien maîtrisé, les graphiques, par exemple, n'étant parfois vus que comme des icônes de fonctions, et non comme des outils de travail sur ces fonctions. Benitez & Drouhard (2015) mettent aussi en évidence que : les étudiants testés dans leur étude […] « ont d'abord à surmonter des difficultés de calcul algébrique et de raisonnement, et que les étudiants qui ne manifestent plus ces difficultés algébriques sont confrontés à des obstacles venant de leur conception inachevée des objets mathématiques, et des liens entre les différents objets ».

Rogalski (2008) pointe également la difficulté qu'ont les étudiants à passer du niveau global au local, ou réciproquement, notamment dans l'étude des fonctions. C. Winsløw signale aussi que :

> Parmi les enseignants universitaires, il y a un sentiment répandu que l'étudiant doit, effectivement, accomplir des « sauts cognitifs » dans le parcours […] vers l'analyse abstraite enseignée à l'université. (Winsløw, 2007, p.189)

Ces points d'achoppement ont été étudiés dans la thèse de Praslon (2000) : il signale que le problème de la transition n'est pas uniquement le passage du pragmatique au formel, mais, lors du premier semestre universitaire, une accumulation de micro ruptures de contrat que les enseignants universitaires ne décèlent pas (Bridoux, De Hosson & Nihoul, 2020). Ainsi, les étudiants ont bien visité un univers mathématique substantiel (par des exercices à résoudre) autour des concepts d'Analyse enseignés en classe de terminale du lycée, mais sans les éléments d'expertise de la pratique mathématique de niveau supérieur.

Artigue (2016) résume ce point de vue, les éléments essentiels de cette transition et de ce niveau d'expertise requis, dans l'extrait ci-dessous :

> [F.Praslon] showed that the transition between secondary and mathematics-sciences programmes at university was not a radical move from the proceptual to the formal world, from an intuitive and algorithmic Calculus to the approximation world of Analysis; it was rather an accumulation of micro-breaches, thus less visible and not appropriately addressed by the institution. The main breaches he identified are the following:
>
> - an increasing speed in the introduction of new objects;
> - a greater diversity of tasks making routinization much more difficult;
> - much more autonomy given in the solving process for similar tasks;
> - a new balance between the particular and the general, the *tool* and *object* dimensions of mathematical concepts;
> - objects more controlled by definitions, results more systematically proved;
> - proofs which are no longer "the cherry on the cake" but take the status of mathematical methods. (Artigue, 2016, p.19)

Ainsi, la conjonction de cette demande de plus de définitions et de démonstrations crée un décalage important, mais les professeurs de l'université n'en sont généralement que peu conscients. Ce que nous visons dans le dispositif décrit et mis en œuvre, c'est de faciliter cette transition par des tâches qui s'appuient sur les connaissances du secondaire mais permettent un accès aux nouvelles exigences des mathématiques du supérieur : notre objectif est donc précisément de proposer aux étudiants des situations compatibles avec leurs savoirs, et leur permettant d'accéder aux pratiques et savoirs essentiels du niveau universitaire. Nous avons donc analysé leurs difficultés et leur avons soumis des situations qui devaient leur permettre d'entrer plus facilement dans les questions posées, de questionner les concepts en jeu en articulant les dimensions sémantique et syntaxique (Deloustal-Jorrand et al., 2020), puis d'accéder aux méthodes de résolution exigées au niveau de l'université.

2.C.b. Nature des difficultés

Nous pouvons alors classer les difficultés généralement observées chez les étudiants débutants (et documentées dans les études citées), en lien avec leur(s) origine(s) potentielles :

- Un contrat didactique spécifique au supérieur, reposant sur une responsabilisation des étudiants inhérente à l'étude approfondie des contenus des cours et des TD, et donc un contrat nouveau pour les étudiants ;
- Une capacité à travailler : effectuer un changement de points de vue sur les concepts mathématiques (ponctuel/local/global) dans le domaine de l'Analyse (Vandebrouck, 2011) ;
- La complexité des signes relevant de plusieurs registres sémiotiques et la maîtrise du développement et l''articulation des registres sémiotiques (Gibel, 2020 ; Bloch & Gibel, 2011 ; Kidron & Tall, 2015 ; Gonzalez, 2021).
- Le choix du cadre le mieux adapté pour élaborer et formaliser une preuve, puisque les preuves sont devenues un élément essentiel de la pratique (Lalaude-Labayle, 2019) ;
- La maîtrise – à acquérir – des formes de raisonnements et la prise de conscience de leurs différentes fonctions.

2.D. Les grandes lignes du dispositif et le contrat didactique

La mise en œuvre du dispositif décrit précédemment repose donc sur un contrat didactique universitaire *et* spécifique qu'il nous semble important de définir. Ainsi, les principales responsabilités dévolues aux étudiants sont :

- L'implication dans la recherche, l'élaboration de raisonnements en réponses aux questions de l'énoncé, la formulation de questions en vue de surmonter certains obstacles, ainsi que la rédaction d'une solution reposant sur la mise en œuvre d'un mode de raisonnement adéquat et sur l'usage conforme des signes mathématiques.
- La présentation au groupe, par le trinôme tiré au sort, du raisonnement mathématique produit en réponse à chacune des questions de la situation de recherche.
- Le questionnement, par les trois étudiants constituant le jury, des raisonnements et des réponses produites par le trinôme exposant son travail.
- L'analyse critique du raisonnement produit par des étudiants ayant ou non travaillé cette situation.
- La rédaction[9] d'une solution intégrant les commentaires et les remarques effectués par les étudiants et l'enseignant suite à la présentation.

Intéressons-nous à présent aux responsabilités de l'enseignant relatives à la préparation de chacune des séances du dispositif. Ces responsabilités comprennent notamment une analyse *a priori* rigoureuse de la situation proposée, afin d'être en mesure d'anticiper les procédures des étudiants et les difficultés qu'ils peuvent rencontrer.

Il s'agit pour l'enseignant de considérer la dimension heuristique de l'activité dévolue aux étudiants comme « première », en favorisant un processus de dévolution de la situation basé sur une réelle responsabilisation de chaque trinôme et nécessitant un accompagnement visant à maintenir le processus de recherche. Ce processus de dévolution nécessite que les enseignants aient construit une

[9] Par un trinôme n'ayant pas présenté son travail.

réflexion didactique qui conduise donc à une analyse *a priori* de la situation. Cette dernière nécessite que l'enseignant ait envisagé en amont de la séance précisément :

- La ou les procédures de résolution de la situation en précisant le cadre (ou les cadres) qu'il convient de privilégier pour élaborer la procédure ou les nécessaires changements de registres dans la construction de la solution ;
- Les principales variables didactiques de la situation ;
- Les principales difficultés auxquelles les étudiants peuvent être confrontés dans l'appropriation de la situation objective et l'élaboration de la procédure de résolution
- La nature des aides qu'il pourra leur apporter en liens avec les ressources dont disposent les étudiants sur le plan des connaissances et des savoirs mathématiques (antérieures et actuelles : lycée et semestre 1 de la L1) ainsi que sur le plan des modes de raisonnements. Parmi ces aides, il sera conduit à amener les étudiants à formuler explicitement la nature des difficultés auxquelles ils sont confrontés. Cette formulation renseignera l'enseignant sur les représentations et les conceptions des étudiants inhérentes aux objets mathématiques qui définissent la situation objective et sur leur capacité à produire un raisonnement « original ».
- Les ressources numériques et les TICE qui pourront jouer un rôle dans l'appropriation de la situation et le contrôle de la validité des procédures.
- Les moyens de contrôle et de validation que les étudiants pourront mobiliser de façon autonome pour déterminer la vraisemblance et la validité de leurs résultats.

Lors de la mise en œuvre de la séance, les principales responsabilités qui incombent à l'enseignant sont les suivantes :

- Observer les interactions au sein de chaque trinôme pour identifier leurs difficultés, les accompagner dans la résolution en apportant des éléments de réponses à leur questionnement afin de favoriser l'appropriation de la situation de recherche et d'éventuels changements de cadres ou de registres et en favorisant chez les étudiants la mise en œuvre d'une procédure de contrôle afin de porter un regard critique et autonome sur leur procédure de résolution et sur la conclusion de leur raisonnement (Gibel, 2018). Il s'agit avant tout de conserver la composante recherche de la situation, en s'inscrivant dans l'optique d'une « guidance faible » (Bartolini-Bussi, 2009) ne dénaturant pas la dimension heuristique.
- Identifier précisément la nature et l'origine des difficultés des étudiants en analysant les différents types d'erreurs produites lors de l'exposé de leurs travaux.
- En fin de questionnement par le jury, choisir de revenir sur certains éléments de la solution en vue de lever le doute sur certaines interrogations quant aux savoirs en jeu, à l'adéquation des signes mobilisés et à la pertinence des réponses proposées.
- A l'issue des questions, décider des connaissances et des savoirs qu'il convient d'institutionnaliser : identification des objets mathématiques qui définissent la situation objective, nature et forme des signes et des raisonnements mobilisés lors de l'étude, liens entre les procédures distinctes mises en œuvre par différents groupes ; principaux enjeux didactiques et mathématiques de la situation, retour sur les registres sémiotiques mobilisés.

- Commenter et questionner l'écrit de synthèse produit par le trinôme – en charge de produire la mémoire de la situation de recherche – en vue d'une réécriture valide sur le plan sémantique et syntaxique.

Ce contrat spécifique est exposé en début d'année aux étudiants inscrits dans cette unité d'enseignement ; une situation de recherche initiale leur est proposée et à l'issue de la phase de recherche, l'enseignant gère la mise en commun des procédures des étudiants et rédige ensuite au tableau la solution afin de mettre en évidence les attendus de la restitution des situations. Cette situation, appelée Situation 1, est détaillée ci-dessous. Puis, au fil des séances, les sept ou huit situations de recherche à résoudre en trinômes leur sont proposées ; dans ce texte, nous en présentons une de façon détaillée (Situation 2).

3. SITUATIONS MISES EN ŒUVRE : ANALYSE DE L'EVOLUTION DES REPRESENTATIONS ET DES CONCEPTIONS DES ETUDIANTS

L'expérimentation a été menée de 2018 à 2021 dans cinq groupes de travaux dirigés au premier semestre de la première année de Licence de Mathématiques, d'autres licences scientifiques, et en licence MIASHS[10]. Les étudiants ont choisi de suivre cette Unité d'Enseignement intitulée « Outils de méthodologie pour comprendre les mathématiques ». Les cinq enseignants qui ont mené ces expérimentations sont ceux à l'origine du projet pédagogique innovant. Ils ont interagi avec les chercheurs en didactique, en vue de définir précisément le déroulement de chaque séance, de rédiger les énoncés des situations de recherche et de déterminer pour chacune des situations le contrat didactique correspondant. Les chercheurs en didactique ont par ailleurs contribué à l'encadrement de groupes de travaux dirigés du dispositif.

3.A. Le choix et la formulation des situations : importance de la situation 1 ou comment permettre l'appropriation de ce dispositif en précisant le contrat

Nous avons sélectionné des situations qui pouvaient permettre aux étudiants de réinvestir leurs connaissances du secondaire, mais aussi de questionner les concepts en jeu et les modalités de calcul, les techniques mathématiques, et les raisons afférentes à ces techniques et concepts. Ainsi, dans cet article, nous présentons la situation d'introduction du dispositif (situation 1), puis l'une des situations données à résoudre aux étudiants.

Bartolini-Bussi (2009) pose un certain nombre de critères et de modalités qui lui paraissent conditionner l'entrée des élèves dans le processus souhaité[11]. Bien que son étude ait été faite dans le cadre de situations du primaire, les considérations invoquées nous paraissent pertinentes pour les situations à dimension adidactique à tous les niveaux. Ainsi :

- la situation ne doit pas mener trop rapidement à la production de conjecture : les élèves/étudiants doivent avoir un délai de réflexion et de recherche non ciblée afin de définir l'objet adéquat de la conjecture et de la preuve ;

---

[10] Mathématiques et Informatique appliquées aux Sciences Humaines et Sociales
[11] Il s'agit du processus de preuve.

- la situation doit permettre de cibler la procédure de recherche sur la façon générique d'obtenir le résultat, et non sur le résultat directement, ainsi que le remarque aussi Pedemonte (2007) : il peut exister, dit aussi cette auteure, une continuité structurelle entre la production de la conjecture et la construction de la preuve ;

- le fait de guider trop la recherche peut amener des dérives dans le travail des étudiants, celui-ci se limitant à une suite de tâches à effectuer, sans en percevoir les véritables raisons ni même la logique de construction. Ceci est assimilable à un phénomène de guidance forte, observé régulièrement dans le secondaire, et va à l'encontre d'une responsabilisation des élèves nécessaire à une prise d'autonomie.

La situation 1 a déjà été proposée par certains chercheurs en didactique des mathématiques au niveau du lycée[12], elle ne devrait donc pas être trop déstabilisante pour des étudiants de L1. Le but des situations, en général, est de faire comprendre aux étudiants que l'objectif des mathématiques n'est pas que de « faire des calculs » : il s'agit d'identifier les objets mathématiques « utiles », les concepts pertinents, et de raisonner sur ces objets pour en déduire des propriétés (cf. Bloch, 2015).

L'objectif de cette situation, dont l'énoncé est proposé en Annexe 1, est que les étudiants donnent du sens au concept de fonction en le reliant à sa signification : dans cette situation, il s'agit de déterminer et d'étudier l'aire d'une surface en fonction d'une variable identifiée. Certes, ce concept d'aire variable est introduit au lycée, mais proposer de calculer une aire en choisissant de considérer deux variables différentes n'est pas usuel au niveau du secondaire. Cela vise un recul sur les notions d'aire et de fonction.

Nous attendons des étudiants qu'ils pratiquent une lecture active et raisonnée de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registre (graphique, numérique, algébrique, géométrique).

La particularité de cette mise en activité est donc que – suite à la présentation du problème dans sa globalité – les étudiants sont partagés en deux groupes : l'un d'eux calcule l'aire en fonction de la variable « angle », l'autre en fonction de l'abscisse d'un point. Ceci conduit chaque groupe à étudier une fonction différente.

Le but de cette situation est de comprendre que les propriétés qui résultent de l'étude de chacune de ces fonctions conduisent aux mêmes conclusions sur la variation de l'aire, et donc, une aire n'est pas associée de façon automatique à une unique fonction.

La finalité est aussi d'amener les étudiants à mobiliser tour à tour différents registres (algébrique, numérique, graphique et géométrique) lors de l'étude de chaque fonction et ainsi de percevoir les propriétés de chacune des fonctions dans différents registres sémiotiques.

Nous donnons ci-dessous le schéma de cette situation 1 ; l'énoncé complet est en Annexe 1.

Situation 1

On considère (cf. Figure 1) un triangle déformable ABC constitué d'un segment fixe [AB] de 6 centimètres de longueur, et du segment [AC] de 4 centimètres de longueur, pivotant autour de A dans l'un des deux demi-plans de frontière (AB).

[12] En classe de terminale scientifique en 2015.

On désigne par H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et par (Γ) le demi-cercle décrit par le point C. On se propose d'étudier, de deux façons, les variations de l'aire du triangle ABC en fonction de la position du segment [AC].

La première façon consiste à calculer l’aire en fonction de l’angle $\widehat{BAC}$; la deuxième, en utilisant l’abscisse *x* du point C. Donc il s’agit de la variation d'une aire de triangle dont un sommet varie selon deux variables possibles : l'abscisse *x* du point variable ou la mesure *α* de l'angle $\widehat{BAC}$.

La formulation du contrat didactique est incluse dans la consigne donnée aux étudiants :

Consigne : On va traiter un même problème de deux façons différentes. Quatre groupes travailleront sur la partie 1 du problème, quatre groupes travailleront sur la partie 2 du problème. On va se donner 40 minutes pour que chaque groupe résolve le problème. Lors de la mise en commun chacun va présenter sa méthode de résolution et on va essayer de comprendre pourquoi chaque méthode conduit au même résultat alors qu'on a l'impression au départ que ce sont des fonctions différentes.

L’aire du triangle déformable ABC, en fonction de *x*, est donnée par la formule

$$A(x) = 3\sqrt{16 - x^2}$$

avec x qui varie de -4 à 4.

L’aire du triangle déformable ABC, en fonction de α, s’exprime sous la forme

$$A(\alpha) = 12 \sin \alpha$$

avec α, en degré, variant de 0 à 180.

Cette deuxième expression algébrique de l’aire peut paraître plus simple à étudier pour les élèves.

Lors de la mise en commun, les étudiants sont amenés à calculer les variations de ces fonctions, et à construire des graphiques : *x* varie de - 4 à + 4, et α de 0 à 180 ; néanmoins, les courbes se ressemblent beaucoup, et notamment le maximum de l’aire du triangle correspondant.

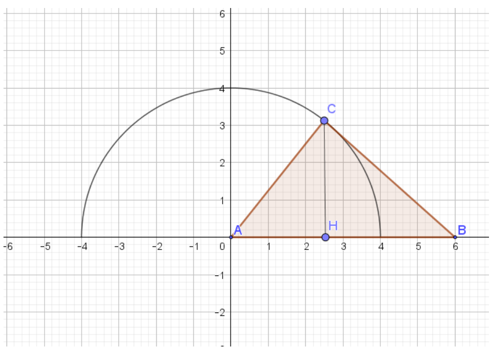


Figure 1 – L’aire du triangle ABC

Après la phase de recherche, l'enseignant a effectué la mise en commun des procédures, il a ensuite rédigé la solution pour expliciter la forme de l’écrit attendu lors de la restitution ainsi que le niveau de justification idoine. Puis il a répondu aux questions posées par un trinôme d’étudiants tiré au sort, constituant le jury. L’enseignant a enfin institutionnalisé les connaissances et les savoirs en jeu dans la situation étudiée : distinction entre fonction de x ou α et variation d'aire étudiée, étude des fonctions et représentation graphique, etc. La question de la cohérence des résultats, obtenus par chacune des deux études menées distinctement pour chacune des fonctions, a été soulignée. Les propriétés de la variation de l'aire – en fonction du déplacement du point sur le demi-cercle – sont similaires indépendamment de la variable choisie et il existe une relation qui lie ces 2 variables. On peut donc en conclure qu'étudier une grandeur ne conduit pas à la représenter par une unique fonction

La séance suivante est la recherche par les trinômes d'étudiants de la situation 2.

3.B. La situations 2, sous la responsabilité des étudiants

La situation porte sur la notion de limite de suites et conduit à l'étude d'une série géométrique ; mais une représentation géométrique est proposée, ce qui oblige les étudiants à clarifier les objets dont ils parlent : nombres, « dessins », suite, limite… On étudiera dans les productions des étudiants, qui sont présentées dans la section 4, les confusions qui peuvent avoir lieu.

3.B.a. Mise en œuvre de la situation 2 : Suite de carrés

Afin de déterminer en quoi la confrontation des élèves à des situations de recherche favorise non seulement l'identification des objets mathématiques et l'appropriation des concepts mathématiques, mais aussi la pratique du raisonnement, nous avons procédé à l'analyse des différentes versions produites successivement par un trinôme en charge de la restitution de la solution construite à partir de la situation 2 dont l'énoncé distribué aux étudiants est en Annexe 2.

On construit (cf. Figure 2) une « suite » de carrés juxtaposés de la manière suivante : le côté du premier carré est de longueur 1 (en référence à une unité donnée), puis chaque carré a pour mesure de côté $\frac{3}{4}$ de la mesure du côté du carré précédent.

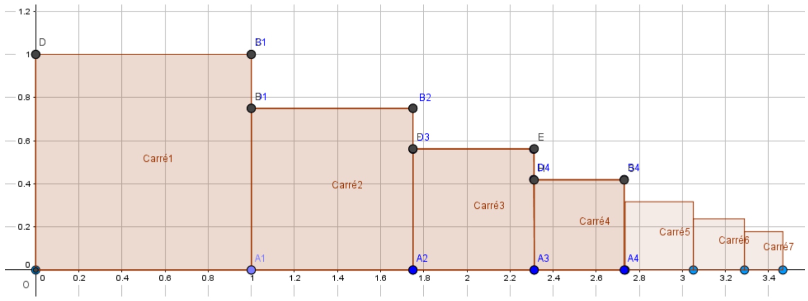


Figure 2 – Les sept premiers carrés obtenus par le procédé de construction

Dans cette situation, les élèves doivent déterminer s'il est ou non possible de construire un « énième » carré, dont x_n, l'abscisse du point A_n – correspondant à la mesure OA_n, où O désigne l'origine du repère – est strictement supérieure à 4. Puis ils doivent montrer que les points $(B_i)_{i\geq 1}$ sont alignés, et calculer l'aire totale de la figure. Il s'agit d'une situation à dimension adidactique, visant à confronter les étudiants à la notion de limite. Cette dernière est obtenue ici comme le résultat du processus de construction des carrés, itéré à l'infini. Cette situation offre la possibilité d'étudier la notion de limite finie d'une suite ; son intérêt principal est qu'elle est issue de connaissances du secondaire, et qu'elle offre la possibilité d'articuler différents cadres (algébrique, graphique et géométrique) pour une meilleure appréhension du concept de limite d'une série.

3.B.b. Analyse *a priori* de la situation 2

Place de la situation dans le dispositif

La situation « Suite de carrés » est la première situation de recherche dévolue aux étudiants et dont la résolution et la restitution leur incombent pleinement.

Cette situation est fondée sur la notion de limite ; il s'agit de différencier la limite d'une suite de carrés, d'une suite de points, d'une aire… et de calculer l'aire totale d'une figure constituée d'une infinité de carrés dont l'aire tend vers zéro. La situation permet aux étudiants de s'appuyer sur le registre graphique afin de contrôler la validité des résultats obtenus par le calcul.

Les abscisses des points $(B_i)_{i\geq 1}$ sont à identifier sur la figure construite et à distinguer des points mêmes. Pour montrer l'alignement des points $(B_i)_{i\geq 1}$, les étudiants peuvent avoir recours à des procédures géométriques variées (équations de droites, colinéarité des vecteurs, triangles semblables, etc.). Certaines d'entre elles nécessitent la mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence, d'autres – par exemple celle basée sur la colinéarité – peuvent être établies directement par les étudiants sans recours à une récurrence. Pour déterminer l'expression de l'abscisse des points $(B_i)_{i\geq 1}$, la décision d'avoir recours à l'usage des écritures fractionnaires permet de simplifier les calculs à effectuer notamment lorsqu'il s'agit d'établir l'alignement des points $(B_i)_{i\geq 1}$.

Les étudiants peuvent confondre les points et leurs coordonnées ; ils peuvent aussi avoir des difficultés à montrer l'alignement demandé, et à calculer aisément la somme de la série. Les savoirs relèvent *a priori* tous du secondaire, mais l'usage des signes peut être problématique : rappelons que les quantificateurs notamment ne sont introduits qu'en classe de Terminale et utilisés de façon très modérée. De même, le choix des raisonnements peut poser problème : les élèves du secondaire ne sont pas habitués à choisir un raisonnement par l'absurde, par récurrence, par contraposée… de leur propre chef.

Questions sur les restitutions et rédactions des étudiants

Nous focaliserons donc l'analyse sur les points suivants :

- L'identification correcte du problème par les étudiants ;
- Leur aptitude à poser des conjectures ;
- La capacité à distinguer les termes d'une suite et la limite, une fonction et un ensemble de fonctions ;
- La capacité à mener des calculs puis à en tirer des conclusions ;
- La réponse donnée, ou non, au problème ;
- Comment utilisent-ils des savoirs : lesquels, de façon adéquate, ou non, avec les signes et notations ;
- Réussissent-ils à généraliser un calcul, puis à identifier et utiliser un mode adéquat de validation ? Ceci concerne le niveau d'utilisation des signes atteint par les étudiants, notamment du point de vue de leur capacité à généraliser les calculs et donc à atteindre le niveau des arguments génériques, comme par exemple, des propriétés des fonctions ou des suites, des théorèmes, etc. (cf. le tableau « signes et milieux », (Bloch & Gibel, 2011 : voir Annexe 3) ;

- Sont-ils conscients de la nécessité de prouver une équivalence « dans les deux sens » ? Implication et sa réciproque, cela aussi ne faisait pas partie des programmes de Terminale du moins jusqu'en 2019.

Du point de vue de l'enseignant, il faut se demander quelle institutionnalisation est pertinente, ainsi il faut faire le point sur les questions suivantes :

- Quel problème a-t-on résolu, et quels étaient les objets mathématiques en jeu ?
- Comment fonctionnent les signes utilisés, quelles sont les règles d'écriture ?
- Quelles preuves ont été élaborées, et menées à terme avec une formalisation adéquate ?
- A quels types de raisonnements les étudiants ont-ils eu recours ?
- Quels compléments sont nécessaires pour établir des preuves mathématiques valides des résultats trouvés ?

Nous allons maintenant examiner les productions des étudiants et leur adéquation aux savoirs en jeu.

4. PREMIERS RESULTATS EXPERIMENTAUX : EFFETS SUR LES REPRESENTATIONS ET LES CONCEPTIONS DES ETUDIANTS

4.A. Résolution de la situation 2

Dans ce paragraphe, nous rendons compte de l'évolution de la rédaction de la solution 2 produite par un trinôme d'étudiants issus de section scientifique ; nous examinons initialement la première version rédigée par le trinôme, puis les suivantes.

Ci-dessous, dans les tableaux 1, 2 et 3, nous indiquons dans la première colonne les éléments rédigées par un trinôme d'étudiants et dans la deuxième colonne les commentaires rédigés par l'enseignant en vue d'une réécriture de la procédure de résolution.

Extraits d'une production d'un groupe d'étudiants	Commentaires du professeur rédigés sur la copie
La suite de carrés représente la suite C_n *Puisque $C_1=1=\left(\frac{3}{4}\right)^0$; $C_2=\left(\frac{3}{4}\right)^1$; $C_3=\left(\frac{3}{4}\right)^2$; $C_4=\left(\frac{3}{4}\right)^3$ et $C_5=\left(\frac{3}{4}\right)^4$* *On a donc $C_{n+1}=\left(\frac{3}{4}\right)^n$* *On conjecture que les points $(B_n)_{n\epsilon N}$ sont alignés.* *Pour démontrer cette conjecture nous utiliserons la fonction affine tq f(x)=ax+b dont la droite passe par les points B_n.* *On calcule le coefficient directeur* *f(1)=1 f(1,75)=0,75* $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0{,}75-1}{1{,}75-1}=\frac{-0{,}25}{0{,}75}=-\frac{1}{3}$	Il y a un problème, C_1 est un carré et (3/4) est un nombre ! Ceci n'a pas de sens !

On résout l'équation f(1)=1 $\Leftrightarrow \frac{1}{3}.1+b=1$ $\Leftrightarrow b=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ *Donc* $\forall x \in R\,, f(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ *1)* $A_n>4 \Leftrightarrow x>4$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\,x<-\frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}<-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow f(x)<0$ *A partir de x=4, la fonction f est négative. Donc il ne peut pas exister de carré* C_n *tel que l'abscisse du sommet* $A_n>4$*.*	Ceci est la droite (B_1B_2) Pourquoi $B_n \in (B_1B_2)$ si n>2 ? Expliquer ! $A_n>4 \Leftrightarrow x>4$??

Tableau 1 – Extrait de la première version des étudiants commentée par l'enseignant

Les commentaires de l'enseignant illustrent la manière dont il relève la confusion entre les points et les abscisses, et la non conclusion pour B_n. Dans cet écrit, les étudiants montrent leur difficulté à identifier et transcrire en signes mathématiques le caractère générique de l'alignement des points (B_n) qui doit être valable pour tout *n*.

Dans la dernière ligne de conclusion, ils semblent se baser sur le registre graphique sans parvenir à faire le lien avec le registre algébrique afin de produire une preuve recevable. Selon le tableau des niveaux de signes (Bloch & Gibel 2011), ils restent au niveau des calculs et conjectures ponctuelles, et non au niveau des calculs génériques.

Rappelons que nous nommons « génériques » des formulations (algébriques par exemple) valables sur un ensemble de valeurs de IR, à l'opposé de déclarations pour des valeurs particulières sans généralisation possible.

Voici à présent la version 2, rédigée par le trinôme d'étudiants après réception de la version commentée du Tableau 1 :

Extraits de la version 2 de la production du trinôme d'étudiants	Commentaire du professeur rédigé sur la copie
1) On conjecture que les points $(B_n)_{n\in N}$ *sont alignés* *Pour démontrer cette conjecture nous utiliserons la fonction affine tq f(x)=ax+b dont la droite passe par les points* B_n*.* *On calcule d'abord le coefficient directeur de* (B_1B_2) *:* $B_1(1\,;1)$*,* $B_2(1{,}75\,;0{,}75)$ *D'où f(1)=1 f(1,75)=0,75* $a=\frac{y_{B2}-y_{B1}}{x_{B2}-x_{B1}}=\frac{0{,}75-1}{1{,}75-1}=\frac{-0{,}25}{0{,}75}=-\frac{1}{3}$	

Puis celui de (B_1B_3) : $B_1(1\ ;1)$ *et* $B_3\left(\frac{37}{16}\ ;\frac{9}{16}\right)$ *D'où* $f(1)=1$ $\quad f(\frac{37}{16})=\frac{9}{16}$ $$a=\frac{y_{B3}-y_{B1}}{x_{B3}-x_{B1}}=\frac{\frac{9}{16}-1}{\frac{37}{16}-1}=\frac{-\frac{7}{16}}{\frac{21}{16}}=-\frac{7}{21}-\frac{1}{3}$$ *(B_1B_2) et (B_1B_3) ont le même coefficient directeur, donc les points sont alignés.* *On résout l'équation* $f(1)=1\Leftrightarrow \frac{1}{3}.1+b=1 \Leftrightarrow b=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ 1) *Donc* $\forall x\in R\ , f(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$	Pourquoi ?? Expliquer !

Tableau 2 – Extrait de la deuxième version des étudiants commentée par l'enseignant

Découvrons à présent la troisième et dernière version rédigée par les étudiants en intégrant les remarques faites par l'enseignant :

Extraits de la troisième version de la production des étudiants	Commentaires portés sur la copie par l'enseignant
1) *On conjecture que les points* $(B_n)_{n\in N}$ *sont alignés* *Pour démontrer cette conjecture nous utiliserons la fonction affine tq* $f(x)=ax+b$ *dont la droite passe par les points* B_n. *On calcule d'abord le coefficient directeur de* (B_1B_2) : $B_1(1\ ;1)$, $B_2(1{,}75\ ;0{,}75)$ *D'où* $f(1)=1$ $\ f(1{,}75)=0{,}75$ $$a=\frac{y_{B2}-y_{B1}}{x_{B2}-x_{B1}}=\frac{0{,}75-1}{1{,}75-1}=\frac{-0{,}25}{0{,}75}=-\frac{1}{3}$$ *On effectue maintenant une récurrence pour montrer que peu importe* (B_n) $a=-\frac{1}{3}$ *, donc ils appartiennent tous à la droite.* <u>*Initialisation*</u> : *On calcule le coefficient directeur de* (B_1B_3) *:On a* $B_1(1\ ;1)$ *et* $B_3\left(\frac{37}{16}\ ;\frac{9}{16}\right)$ $$a=\frac{y_{B3}-y_{B1}}{x_{B3}-x_{B1}}=\frac{\frac{9}{16}-1}{\frac{37}{16}-1}=\frac{-\frac{7}{16}}{\frac{21}{16}}=-\frac{7}{21}=-\frac{1}{3}$$ <u>*Hérédité*</u> : *On suppose que* (B_n) *appartient à la droite. On souhaite démontrer que* B_{n+1} *aussi. Pour cela on souhaite démontrer que* $a_{BnB1}=-\frac{1}{3}$ *Et* $B_{n+1}(x_{n+1}\ ;y_{n+1})$ *avec* $x_{n+1}=1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ *et* $y_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$	

$A_{BnBn+1}=\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\frac{(\frac{3}{4})^{n+1}-(\frac{3}{4})^n}{\frac{3}{4})^{n+1}}=\cdots=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=-\frac{1}{3}$ *Conclusion* $\forall n \in N^*$, *on a* $a=-\frac{1}{3}$, *donc la droite passe par tous les points* (B_n) *donc ils sont alignés.* *1) On cherche si un carré* C_n *existe pour* $A_n>4$, *on a* $A(x_n\,;0)$. *Si* $A_n(4\,;0)$, $B_n(4\,;y_n)$. *Pour savoir si un carré* C_n *existe, nous devons trouver si* y_n *existe pour* $x_n>4$. x_n *correspond à x dans la fonction affine, on a alors* $f(4)=-\frac{1}{3}\times 4+\frac{4}{3}=0$ *Donc pour* $A_n(4\,;0)$ *on a* $B_n(4\,;0)$ *soit* $A_n=B_n$. *Donc pour* $A_n>4$, *soit* $a_n>4$, *il n'existe pas de carré* C_n.	Il manque l'argument principal : y_n doit être strictement positif car l'ordonnée de B_n est une puissance de ¾ Car alors $y_n<0$ d'après l'équation de droite.

Tableau 3 – Extrait de la troisième version des étudiants commentée par l'enseignant

Dans cette troisième et dernière version, les étudiants mettent en forme une récurrence claire avec ses trois étapes ; cependant, pour les étudiants il n'est pas nécessaire de montrer que B_n ne peut avoir une ordonnée nulle. Ceci exemplifie le mode de raisonnement souvent dans l'« à peu près » des étudiants. Ils n'ont pas été habitués à contrôler la cohérence de leurs résultats en articulant les dimensions sémantique et syntaxique et à s'assurer ainsi qu'ils sont bien dans un mode de raisonnement valide, et souvent leur ressenti, avec une vision graphique par exemple, leur suffit pour énoncer une affirmation. Du reste, dans le cursus du secondaire il n'y a pas de cours spécifique, ou de commentaire des théorèmes, sur ce qu'est un raisonnement qui prouve une affirmation. Ceci est en rapport avec la rupture de contrat signalée par Praslon (cité par Artigue, 2016) sur la nécessité de (tout) prouver – avec des symboles formels – au niveau supérieur. Or, au secondaire, comme nous l'avons déjà signalé, l'usage des signes formels n'est pas un objet de travail : les étudiants n'ont pas l'habitude d'être autonomes dans la décision des outils à utiliser pour les démonstrations, comme nous le disions dans la première partie de cet article.

Au final, nous pouvons noter que les étudiants sont bien entrés dans le dispositif et ont montré une motivation satisfaisante ; l'observation de leurs méthodes de résolution a confirmé les analyses faites en didactique sur les décalages entre les pratiques du secondaire et les exigences au niveau de L1.

4.B. Synthèse de l'expérimentation des situations

L'expérimentation a donc permis de confronter les étudiants à des problèmes à chercher, avec une attente de preuve mathématique à apporter dans des formulations adaptées. Les observations confirment que les étudiants de L1 ne sont pas habitués à ces exigences. Un résultat positif de ces mises en œuvre est cependant qu'ils ont une certaine expertise du calcul algébrique – ce n'est pas ce point qui les met le plus en difficulté. La première situation a conduit aux calculs d'aire sans peine ; la deuxième s'est révélée plus problématique étant donnée la variété de concepts et de variables en jeu, que les étudiants avaient parfois du mal à dissocier pour établir un raisonnement consistant. Les raisonnements et les signes qui les supportent se sont établis être la plus grande source de difficultés, ce qui n’a rien d’étonnant car cette expertise n’est que peu travaillée au secondaire[13], comme nous le disions.

5. CONCLUSION

Le dispositif expérimenté a confirmé que les étudiants ne sont pas habitués à vérifier si un calcul conduit à un argument recevable puis à une preuve : pour eux, le but serait juste de « faire un calcul ». Cependant, ce dispositif a permis une véritable implication des étudiants dans la recherche et la formulation des situations proposées. La problématique a mis en lumière la nature des obstacles des étudiants concernant l'identification des objets mathématiques, et leur formulation par des signes mathématiques adaptés. Nous avons aussi constaté leur difficulté quant au choix raisonné des procédures de preuve, et leur manque de discernement quant à la forme adéquate du raisonnement adapté au problème posé. Les étapes rédactionnelles prévues dans le dispositif les aident à surmonter ces obstacles et à adopter une posture réflexive quant aux exigences d'une preuve argumentée. L'étude didactique menée montre donc que ce dispositif s'avère complémentaire par rapport au cursus classique de licence, et peut aider les étudiants à comprendre et à réussir ce cursus.

Du point de vue des raisonnements, la mise en œuvre de cette expérimentation a permis aux étudiants non seulement de produire des raisonnements de différentes formes (raisonnement par récurrence, raisonnement par l’absurde, raisonnement par contraposée, etc.) mais encore de prendre conscience de leurs multiples fonctions en lien avec les conditions de leur élaboration : décider de l’utilisation d’une connaissance mais également du cadre adéquat de sa mise en œuvre, conjecturer, justifier, prouver, communiquer les étapes d’un raisonnement, argumenter et démontrer.

Contrairement aux études qualitatives souvent menées sur l’enseignement des mathématiques au supérieur (Grenier-Boley, 2020), notre recherche vise à analyser l’implémentation réelle de situations à dimension adidactique à ce niveau et les connaissances générées par ces situations – connaissances « théoriques » sur les concepts en jeu et connaissances pratiques de raisonnement et de méthodes de calcul et démonstration. Cette spécificité de la théorie des situations didactiques est d’ailleurs signalée par Grenier-Boley (2020). Cela implique d’étudier les conditions réelles de mise en œuvre de la situation et son fonctionnement, lors des phases organisées : dévolution, recherche des solutions par groupes, et institutionnalisation par l’enseignant après restitution des groupes.

Il faut noter que la phase d’institutionnalisation peut s’avérer complexe : au niveau universitaire, comme le notaient Praslon (2000) et Bridoux et al. (2020), les enseignants ne mesurent pas toujours les carences exactes des étudiants sur les concepts ou sur les modes de raisonnement ou de calcul ; et donc nous avons parfois observé des institutionnalisations reprenant un cours quasi complet sur les fonctions ou les suites, ce qui n’était pas pertinent et pouvait occulter les points critiques sur lesquels des précisions auraient été nécessaires.

[13] A ce sujet, on peut consulter les programmes des classes de Première et Terminale sur le site education.gouv.fr.

Références

Artigue, M. (2016). Mathematics education research at University level: achievements and challenges. *Proceedings of INDRUM 2016, First conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*, pp. 11-27. Nardi E., Winslow C. & Hausberger T. editors.

Bartolini-Bussi, M. (2009). Proof and proving in Primary school: An experimental approach. In Lin F.-L., Hsieh F.-J., Hanna G., de Villiers M. (Eds.) *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* Vol.1, pp.53–58.

Benitez, N.S., & Drouhard, J.P. (2015). Una mirada epistemografica sobre el rol de las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones en el ingreso a la universidad. *Actas IV Jornadas de Ensenanza e Investigacion Educativa, Universidad Nacional de La Plata*, Buenos Aires. Consulté le 20/11/2015

Bergé, A. (2016). Le rôle de la borne supérieure (ou supremum) dans l'apprentissage du système des nombres réels. *Proceedings of INDRUM 2016, First conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. Nardi E., Winsløw C. & Hausberger T. Eds.

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 135-193. https://revue-rdm.com/1999/l-articulation-du-travail/

Bloch, I. (2015). Concepts, objets, symboles, enseignement des mathématiques : Quelques réflexions sur l'épistémologie et la didactique. *Petit x*, 97, 71-79. hal-02525717

Bloch, I. (2016). L'enseignement de l'analyse, de la limite à la dérivée et aux équations différentielles : questions épistémologiques et didactiques. In G. Gueudet, Y. Matheron et al., *Enjeux et débats en didactique des mathématiques*, pp. 67-92, La Pensée Sauvage.

Bloch, I. (2018). Connaissances sur les nombres des élèves de fin de secondaire et adaptation à l'université. *Petit x*, 106, 65-77. hal-02524113

Bloch, I., & Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 191-227. https://revue-rdm.com/2011/un-modele-d-analyse-des/ Cite

Bloch, I., & Gibel, P. (2016). A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course. *Communication to INDRUM*, 43-52 Université de Montpellier, ISSN: 2496-1027.

Bloch, I., & Gibel, P. (2019). A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course – presentation and examples, *Annales de didactique et de sciences cognitives.* 24, 183-205. http://journals.openedition.org/adsc/648

Borji, V., & Martínez-Planell, R. (2019). What does '*y* is defined as an implicit function of *x*' mean?: An application of APOS-ACE. *The Journal of Mathematical Behavior* 56 https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100739

Bridoux, S., De Hosson, C., Nihoul, C., (2020). Pratiques in situ d'enseignants universitaires et confrontation avec le vécu des étudiants. In *Proceedings of INDRUM 2020, Bizerte, Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*, (pp. 187-196). DOI: 10.4324/9780429346859-16

Chorlay, R. (2019). A Pathway to a Student-Word definition of Limits at the Secondary-Tertiary transition. IJRUME, https://link.springer.com/article/10.1007/s40753-019-00094-5

Deloustal-Jorrand, V., Mesnil, Z., Gandit, M., Da Ronch, M., Durand-Guerrier, V. (2020). Utilisation de l'articulation entre les points de vue syntaxique et sémantique dans l'analyse d'un cours sur le raisonnement. In *Proceedings of INDRUM 2020, Bizerte, Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics,* (pp.386-395*).* DOI: 10.4324/9780429346859-16

Everaert-Desmedt, N. (1990). *Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de CS Peirce.* Liège : Mardaga.

Ghedamsi, I., Fattoum, F. (2018). Étude de l'évolution des images de la convergence de suites lors d'un enseignement ordinaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 38(2), 207–259. https://revue-rdm.com/2018/etude-de-levolution-des-images-de-la-convergence-de-suites-lors-dun-enseignement-ordinaire/

Gibel, P. (2018). *Elaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques.* HDR, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01919188

Gibel, P. (2020). Analyse en théorie des situations didactiques d'une ingénierie visant une première approche de la notion de limite finie d'une suite. *Revue Québécoise De Didactique Des Mathématiques*, 1, 153-189.

https://rqdm.recherche.usherbrooke.ca/ojs/ojs-3.1.1-4/index.php/rqdm/article/view/21

Gonzalez M.F. (2021). Activité et travail mathématique à la transition Lycée-Université en Analyse : le cas des suites $U_{n+1} = f(U_n)$. Thèse, Université Paris Diderot.

Grenier-Boley, N., Nicolàs, P., Strømskag, H., Tabchi, T. (2012). Mathematics teaching practices at University level. *Proceedings of INDRUM 2020, Bizerte, Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. DOI: 10.4324/9780429346859-16

Kidron, I., & Tall, D. (2015). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics* 88(2),183-199. Springer.

http://www.jstor.org/stable/43589928

Lalaude-Labayle, M. (2019). Un regard épistémologique sur l'évolution historique des notions de preuve et d'axiomatique. *Petit x*, 110/111, 5-26.

Mercier, A. (1995). Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques. In Margolinas C. (Ed.) *Les débats de didactique de mathématiques* (pp.157-168). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Pedemonte, B. (2007). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 25(3), 315–348.

Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S/DEUG-Sciences en Analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse, Université Paris Diderot – Paris 7.

Rogalski, M. (2008). Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle dans la physique élémentaire, questions didactiques. In *IREM de Paris Editeur*, *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (pp. 61-87).

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 16, 149-185.

https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00654184

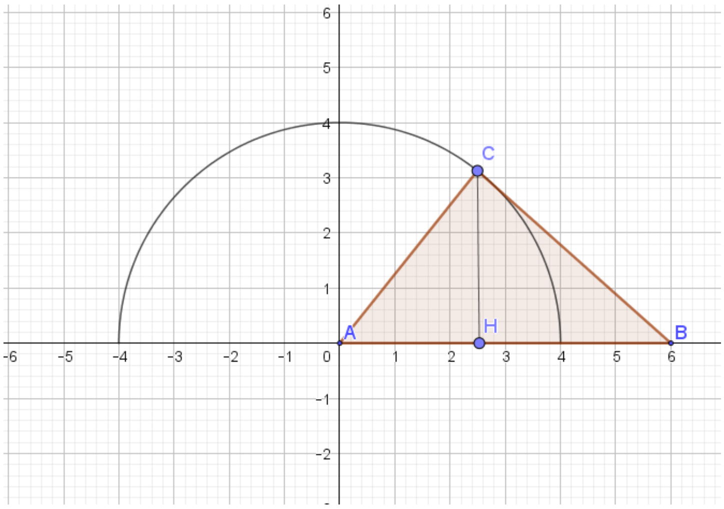
Winsløw, C. (2007). Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 12, 189-204.

Isabelle Bloch
Laboratoire LAB-E3D, laboratoire Epistémologie et didactiques des disciplines, Université de Bordeaux, place de la Victoire, Bordeaux
Isabelle.Bloch@u-bordeaux.fr

Patrick Gibel
Laboratoire LAB-E3D, laboratoire Epistémologie et didactiques des disciplines, Université de Bordeaux, place de la Victoire, Bordeaux
Patrick.Gibel@u-bordeaux.fr

Annexe 1 : Situation 1. Aire variable d'un triangle

On considère un triangle déformable ABC constitué d'un segment fixe [AB] de 6 centimètres de longueur, et du segment [AC] de 4 centimètres de longueur, pivotant autour de A dans l'un des deux demi-plans de frontière (AB).



On désigne par H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et par (Γ) le demi-cercle décrit par le point C. On se propose d'étudier, de deux façons, les variations de l'aire du triangle ABC en fonction de la position du segment [AC].

1. Variation de l'aire en fonction de l'angle $\widehat{BAC}$

On note α la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$et $A(\alpha)$l'aire en cm² du triangle ABC. Faire une figure en vraie grandeur dans chacun des cas suivants : α = 0 ; α = 60 ; α = 120.

Quel est l'intervalle décrit par la variable α ? Exprimer, en fonction de α, l'aire $A(\alpha)$du triangle ABC.

En utilisant des propriétés géométriques de la figure, comparer les aires de deux triangles ABC pour des valeurs de α correspondant à des angles supplémentaires, puis compléter le tableau suivant :

α	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$A(\alpha)$										

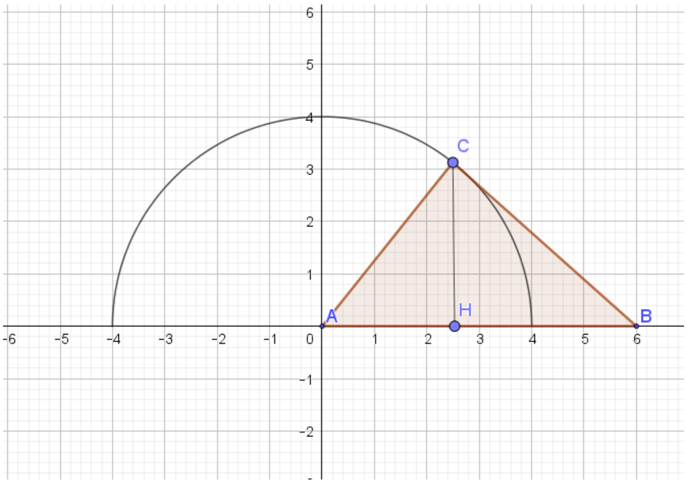
Tracer la courbe représentative de la fonction A sur l'intervalle [0; 90].

Déduire de la question d le tracé de la courbe sur l'intervalle de définition.

Pour quelle valeur de α la fonction A admet-elle un maximum ? Justifier ce résultat à partir de propriétés géométriques de la figure. Quelles sont alors la nature du triangle et son aire ?

Déterminer graphiquement les valeurs de α pour lesquelles l'aire du triangle ABC est égale à la moitié de l'aire maximale ; justifier ce résultat à partir de propriétés géométriques de la figure. Construire le triangle ABC pour les valeurs particulières de α obtenues. Calculer la valeur exacte de $A(\alpha)$pour α = 45.

2. Variations de l'aire en fonction de l'abscisse du point C



Le plan du triangle est rapporté au repère orthonormal comme l'indique le schéma. On note *x* l'abscisse de C dans ce repère et S(*x*) l'aire du triangle ABC.

Faire une figure en vraie grandeur dans chacun des cas suivants : *x* = 4; *x* = 2; *x* = -2; *x* = 0 .

Quel est l'intervalle décrit par la variable x ? Exprimer, en fonction de x, l'aire S(x) du triangle ABC.

En utilisant des propriétés géométriques de la figure, comparer les aires de deux triangles ABC pour des valeurs de x correspondant à deux valeurs opposées de x, puis compléter le tableau suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
S(x)									

Tracer la courbe représentative de la fonction S sur l'intervalle [0; 4]. En déduire le tracé de la courbe sur l'intervalle de définition. Pour quelle valeur de *x* la fonction S admet-elle un maximum ?

Justifier ce résultat à partir de propriétés géométriques de la figure. Quelles sont alors la nature du triangle et son aire ?

Déterminer graphiquement une valeur approchée de chacun des réels *x* pour lesquels l'aire du triangle ABC est égale à la moitié de l'aire maximale. Calculer les valeurs exactes de *x*, soit par une méthode algébrique, soit en utilisant des propriétés géométriques de la figure.

Calculer la valeur exacte S(*x*) correspondant au point C dont les deux coordonnées sont égales.

Annexe 2 : La situation Suite de carrés

On construit une suite de carrés juxtaposés comme sur le schéma ci-dessous.

Le côté du premier carré, C_1, a pour mesure 1. Le côté du deuxième carré, C_2, mesure $\frac{3}{4}$ du premier et ainsi de suite, le carré C_n mesure $\frac{3}{4}$ du précédent carré C_{n-1}.

On note B_n le sommet « en haut à droite » du carré C_n et A_n son sommet « en bas à droite ».

1. Construire les cinq premiers carrés dans le repère ci-dessous.

Quelle conjecture est-il alors possible d'émettre au sujet de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$?

Justifier ou invalider cette conjecture.

2. On se demande s'il existe un carré C_n pour lequel l'abscisse du sommet A_n est strictement supérieure à 4. Déduire de la question 1 la réponse à cette question en produisant une preuve mathématique.

3. On note $(x_n\ ;\ 0)$ les coordonnées du point A_n et $(x_n\ ;\ y_n)$ celles de B_n.

Exprimez x_n en fonction de n. démontrez la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. Soit $s \in [1;4[$. Peut-on déterminer le rang n_0 à partir duquel on ait $x_n \geq s$?

Si $s=4-\varepsilon$, avec $\varepsilon=10^{-6}$, donner une estimation de la valeur de n_0.

Annexe 3 : le tableau des signes, des raisonnements et des milieux

Cf. Bloch & Gibel, 2011.

	Milieu M-2	**Milieu M-1**	**Milieu M0**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du P éventuellement)
Niveaux d'utilisation des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions…)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques : ici symboles de l'Analyse
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine math.
Forme des raisonnements	- Inductif - Abductif - Déductif	- Inductif - Déductif	Déductif